



VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armatto

IX



Palchetto

Num.° d'ordine

3E 88

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

I
199

NAPOLI

B. P.

I

199-200

TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA E D'ALGEBRA.

N O T I Z I E.

Riassunto delle lezioni date alla Scuola di Ponti e Strade su l'applicazione della Meccanica allo stabilimento delle costruzioni e delle macchine, di Navier. Parte I^a. Versione italiana con molte note ed aggiunte e con un'appendice su lo stabilimento de' ponti sospesi, di G. d'Andrea. Prezzo..... D. **2, 40**

L'Algebra, che forma il secondo volume della presente opera, è sotto i torchi.

SSN
606351

TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA E D'ALGEBRA

DI

CARLO D'ANDREA,



Ingegnere del Corpo di Acque e Strade, Professore di Meccanica applicata nella Scuola di Applicazione del detto Corpo e di Algebra Superiore nel Real Collegio Militare, Socio residente dell'Accademia Pontaniana.

VOL. I.

ARITMETICA.



NAPOLI,

DALLA STAMPERIA E CARTIERE DEL FIBRENO

Largo S. Domenico Maggiore N.° 3.

1838.

12800

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR MARCHESE

D. GIOVANNI D'ANDREA,

SEGRETARIO DI STATO DI S. M., MINISTRO DELLE FINANZE E DEGLI AFFARI ECCLESIASTICI; GRAN CROCE DEGLI ORDINI COSTANTINIANO, DI S. GIORGIO, E DI FRANCESCO I.; GRAN CORDONE DEGLI ORDINI DI CARLO III. DI SPAGNA, DI S. GIUSEPPE DI TOSCANA, E DI S. GREGORIO MAGNO; GRAN CROCE DELLA SACRA RELIGIONE GEROSOLIMITANA; DECORATO DELLA GRAN MEDAGLIA D'ORO D'ILLIRATA FEDELTA' DA S. A. I. E R. IL DUCA DI MODENA; REGIO COMMESSARIO PLENIPOTENZIARIO PER L'ESECUZIONE DEL CONCORDATO CONCHIUISO CON LA S. SEDE; SOCIO DELLE PIU' COSPICUE ACCADEMIE; ec, ec, ec.

ECCELLENZA,

L'INCIVILIMENTO delle nazioni serbando un' esatta proporzione con lo stato delle scienze e delle arti, la storia incaricata di rintracciare fra tanti svariati avvenimenti che si succedono il principio invisibile che li lega, non che le cagioni de' cambiamenti nella condizione sociale de' popoli, consacra una pagina di riconoscenza a que' principi o ministri che col loro favore verso le scienze e le arti hanno accelerato lo sviluppo degli elementi dell' umana civiltà.

Quali e quanti elogi non si debbono a V. E. che fra le gravi molteplici cure dello Stato tien sempre



QUESTO trattato elementare di Aritmetica, quantunque scritto per servir d'introduzione allo studio più generale delle quantità, contiene tutte le particolarità che alla speditezza del calcolo pratico possono abbisognare. Non v'ha classe di persone che nell'esercizio delle ordinarie bisogne non sia obbligato a ricorrere al calcolo numerico; nè v'ha risultamento di analisi matematica che per poter esser applicato non si debba in numeri esprimere e convertire. Per la qual cosa una scienza di un uso così universale convien che in tal modo trattata sia, che, mentre le fondamenta prepara per sostenere il vasto edificio delle matematiche discipline, quello sviluppo contenga che renda facile l'applicazione de' principii generali agli svariati casi che i numeri, relativamente alla diversa forma che possono rivestire, danno luogo a dover trattare.

A conseguir questo duplice oggetto, era d'uopo non solo di non trasandar alcun principio, come che difficile paresse, che al rigor delle dimostrazioni fosse necessario, ma ancora di presentare il medesimo calcolo sotto diversi aspetti a fin di mostrare l'identità de' risultamenti, e richiamare le operazioni sotto un punto di vista generale. Scoperto allora il legame che riunisce le diverse specie di numeri, e distinto il principio generale, da cui ciascuna operazione dipende, dalle regole relative al modo di rappresentare

i numeri, ciascuno sarà nel caso d' introdursi in un calcolo per la via più breve e più spianata, e di verificarne l'esattezza variando il sistema delle operazioni parziali di cui si compone.

Ma il saper calcolare a nulla varrebbe di certo, se non si sapesse, da quale delle quattro operazioni la soluzione di una quistione dipende.

Dell'addizione e della sottrazione basta aver ben intesa la definizione per conoscere in quali casi faccia mestieri avervi ricorso.

La moltiplicazione e la divisione si riportano a quistioni alcun poco più difficili. Ma l'idea di proporzione che racchiudono fa prendere a queste due operazioni un senso più esteso di quello che avrebbero, se come casi particolari dell'addizione o della sottrazione si considerassero (giacchè la moltiplicazione non porta più l'idea di ripetere nè la divisione quella di dividere), imprime ad esse un carattere che fa con facilità distinguere i diversi casi nei quali fa d'uopo servirsene, e rende luminose le regole assegnate intorno alla natura del prodotto o del quoziente. Le varie considerazioni su i numeri messi in relazione e tra loro e con l'unità formano insensibilmente l'idea del rapporto, mentre la moltiplicazione e la divisione preparano gli elementi per l'idea della proporzione. La teorica de' rapporti e della proporzione non serve dunque che a dare a delle idee che già si posseggono un aspetto diverso e una maggiore estensione, e a metter nello stato di sviluppare agevolmente in una quistione le relazioni che uniscono le quantità date a quelle che si cercano.

Senza estendermi a parlar partitamente delle materie di cui ho trattato, dirò poche parole di alcune cose, di cui, per essermi allontanato dal sistema generalmente seguito, mi conviene dar ragione, ed altre accennerò che per la loro novità potrebbero esser riguardate di qualche interesse.

Dopo i numeri interi ho trattato immediatamente de' decimali, non solo perchè le regole del calcolo sono comuni a queste due specie di numeri, ma perchè i decimali servono a dare un nuovo sviluppo al sistema di numerazione estendendolo a rappresentar parti minori dell'unità. Resa così la teorica de' decimali indipendente dalle frazioni, il confronto de' metodi relativi alle frazioni ordinarie e alle decimali fa meglio sentire a quale circostanza è dovuta in queste ultime la soppressione de' denominatori e la facilità del calcolo.

Moltissimi teoremi sulla divisibilità de' numeri e su la teorica de' resti rendono compiuto il trattato delle frazioni, che formano la parte più importante dell'Aritmetica, come quelle alle quali tutte le altre specie di numeri si possono agevolmente riportare.

Dopo i numeri complessi segue un capitolo su i differenti si-

stemi di numerazione , il quale , se non ha un uso diretto nel calcolo , serve a rannodare i numeri complessi co' decimali e colle frazioni.

Il Capo VII è tutto relativo al calcolo pratico. Oltre molte importanti osservazioni conducenti ad ottenere i risultamenti di un calcolo nel più breve modo possibile , si è per la prima volta introdotto negli elementi un metodo elegante proposto da Fourier per eseguir brevemente la divisione quando il divisore ha moltissime cifre. I principii alcun poco astrusi di cui bisogna far uso , e le eccezioni che danno luogo a cambiar sovente il corso dell' operazione , potevano essere un ostacolo per presentarlo sotto forma elementare. Ho posto ogni studio per superarlo , in vista dell' uso importante ed esteso che può farsene , e animato dal desiderio di renderne agevole l' accesso. Ho supplito alla dimostrazione con la maggior chiarezza che da me si poteva e con tutto il rigore che la scienza esige , nulla omettendo di ciò che può facilitarne l' intelligenza e la pratica. Il pregio singolare di questa divisione sta in questo , che a qualunque punto si finisca l' operazione si troverà sempre di non aver fatto alcun calcolo inutile.

Questo metodo mi ha dato occasione di mostrare come si può ottenere il prodotto di due numeri , qualunque sia il numero delle cifre di cui si compongono , senza scrivere i prodotti parziali. La qual ricerca , se è utile per far conoscere gli elementi da' quali ciascuna cifra del prodotto risulta , eccita la curiosità per la pratica a cui conduce , e può esser , come esercizio di ragionamento , di non lieve vantaggio.

Nello stesso Capo si dice delle frazioni continue quel poco che basta per convertire una frazione in un' altra che con termini più semplici si approssimi alla data più di qualunque altra che avesse un denominatore minore.

L' ultimo Capitolo , nel quale si tratta delle misure , ha per oggetto di presentare un' utile applicazione delle cose precedentemente esposte , di rischiarar sempre più le idee di misura e di rapporto , di agevolare il calcolo commerciale , e di dar compimento alla teorica de' numeri complessi. Se per ben intender la natura delle misure di estensione si ha bisogno di cognizioni somministrate dalla Geometria elementare , è tale questa circostanza che non può dar luogo a credere essersi tradito l' ordine scientifico , come quando si facesse uso di principii non dimostrati ma dipendenti dalla scienza medesima di cui si tratta. D' altronde la Geometria si fa ordinarariamente andar al pari con l' Aritmetica ; e niente impedisce , qualora ciò non fosse , di riscrivere a tempo opportuno lo studio di una materia che in verun' altra delle parti che compougono il Corso di Matematica si troverebbe meglio collocata.

Non ho parlato delle potenze, delle estrazioni di radici, delle progressioni e de' logaritmi, perchè queste teoriche 1° non entrano nelle quistioni che si risolvono coi soli numeri; 2° dovrebbero esser trattate con quella imperfezione o ristrettezza che limita la mente e ne reprime gli slanci; 3° quando sarebbero riprese in Algebra per esser esposte con la conveniente generalità ed estensione, forse non ecciterebbero quell'interesse, che è necessario per ottener dello studio un felice successo.

Per non generar confusione nella mente dell' Allievo col riempirla di molte idee in una sola volta, si potrà riserbare per uno studio più esteso e per una seconda lettura la parte che in picciol carattere si troverà scritta.



TRATTATO ELEMENTARE

DI

ARITMETICA.

NOZIONI PRELIMINARI

1. **DICESI** *grandezza* o *quantità* tutto ciò che è o si può concepir suscettibile di aumento o di diminuzione determinabile. La scienza che esamina le proprietà della grandezza, o nello stato in cui è o nel suo aumento e decremento, si chiama *Matematica*.

2. Una cosa non si può dir grande o piccola, se non paragonandola ad un'altra della medesima specie. La quantità che serve di termine di paragone per tutte quelle di una data specie chiamasi *unità*. Quando una quantità si paragona alla sua unità si ha per oggetto di vedere quante volte questa unità vi è contenuta. Da questo confronto siam portati a concepir la grandezza divisa in parti, ciascuna eguale alla sua unità; sia che questa divisione esista o non esista nella grandezza. Così dicendo che la distanza da un Paese ad un altro è dieci miglia, concepisco la strada divisa in dieci parti, delle quali ognuna è un miglio, benchè queste divisioni non esistano nella strada stessa. Dicendo poi 50 uomini, trovo in effetti che ogni uomo è diviso e staccato dall' altro, e questa quantità non è che la collezione di più cose simili.

Si può inoltre aver per oggetto, non di determinare quanto è una grandezza rispetto ad un'altra della medesima specie,

ma sibbene le proprietà della medesima dipendenti unicamente dalla sua figura; allora la grandezza si presenta sotto forma continua, o come un sol tutto senza divisioni di parti. Considerando per es. il cerchio, possiamo proporci di ricercarne le proprietà, le quali, essendo indipendenti dalla sua grandezza assoluta, convengono egualmente a tutti i cerchi; non vi è in tal caso bisogno di rapportare il cerchio alla sua unità, e concepirlo perciò diviso in parti.

Si distinguono adunque due specie di quantità o grandezze, la prima è detta *discreta*, la seconda *continua*; e siccome nelle grandezze della prima specie si ha per oggetto di determinare il *quanto* è l'una rispetto all'altra, sarà forse più proprio applicare alla prima la parola *quantità* e dirla *quantità discreta*, e chiamar l'altra *grandezza continua*.

L'esame delle proprietà della grandezza continua è l'oggetto della *Geometria*; la determinazione delle proprietà o delle relazioni che hanno tra loro le quantità discrete costituisce in generale la *scienza del calcolo*, che ha il suo incominciamento dall'*Aritmetica*.

3. La riunione di più unità della medesima specie chiamasi *numero*. Il numero può dirsi ancora il risultamento del confronto fatto di una quantità colla sua unità (n° prec.): esso esprime quante unità sono necessarie per formare la quantità data. Il numero adunque non risveglia alcuna idea se non si è acquistata prima quella dell'unità corrispondente. La proposizione: questo muro è 10 canne, non dà alcuna idea della lunghezza del muro se non a chi ha quella della canna.

L'*Aritmetica* è precisamente la scienza de' numeri.

4. Un numero, se è esattamente composto di più unità, dicesi *intero*; se esprime una parte dell'unità, *frazione*; e se rappresenta diverse unità con delle parti dell'unità stessa, dicesi *frazionario*.

Di più, un numero si dice *astratto* se non si riferisce ad una unità di determinata specie, come sette, tre; e si chiama *concreto* quando è nominata la specie di unità, come due canne, sei miglia, tre libbre, ec.

Fissate queste nozioni, passeremo ad occuparci delle operazioni che si possono fare sulle diverse specie di numeri.

CAPO I.

DE' NUMERI INTERI.

5. Le ricerche principali da farsi su i numeri riguardano la loro composizione. Il modo più facile per comporli consiste nell'aggiunta successiva dell'unità. In tal guisa aggiungendo un'unità all'altra si forma il numero due, a questo numero aggiungendo un'altra unità si forma il tre; e così di seguito. Questo stesso modo di composizione mostra che non vi è limite alla grandezza de' numeri, giacchè per quanto grande possa esser un numero, si potrà sempre, aggiungendo a quello un'altra unità, formarne uno più grande. Esistendo dunque infiniti numeri, e bisognando inoltre per poter ragionar di essi aver de' caratteri onde rappresentarli e delle parole onde esprimerli, è facile concepire che sarebbe stato impossibile conseguir questo intento, se non si fosse inventato un sistema, che offre il mezzo di rappresentare ed esprimere tutti i numeri possibili con la sola combinazione di pochi nomi e di pochi caratteri. Questo è ciò che costituisce la numerazione parlata e la numerazione scritta, di cui passeremo da prima ad occuparci.

ARTICOLO I.

Della Numerazione.

6. La numerazione parlata è stabilita sopra un sistema mediante il quale con poche parole, poste in combinazione e variate nelle desinenze, si possono esprimere tutti i numeri possibili. Le parole radicali che s'impiegano per tale oggetto sono le seguenti:

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, cento, mille.

La prima esprime l'unità, la seconda esprime il numero che si forma aggiungendo all'unità un'altra unità; la terza, il numero che si forma aggiungendo un'altra unità al precedente; e così fino al nove. La parola dieci esprime il numero nove più

uno. Si considera questo numero come una nuova unità dieci volte più grande della prima, ed è chiamata *diecina*. Si contano le diecine come le prime unità, e le collezioni di diecine si esprimono per mezzo delle stesse prime parole colla desinenza in *anta* o in *enta*. Per es., *trenta* esprime tre diecine, ossia la collezione di tre unità dieci volte più grandi di quelle cui si riferisce la parola tre. Parimenti cinque diecine si esprimono con la voce *cinquanta*; sette diecine con *settanta*, ec. Fa eccezione a questa legge la parola *venti*, che esprime due unità dieci volte più grandi di quelle espresse da due. Secondo la regola generale si sarebbe dovuto dire *duenta*. Le diecine, ossia le unità le cui collezioni si esprimono colle parole *dieci*, *venti*, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, ec. si dicono unità di second' ordine.

Per esprimere le collezioni di alcune unità semplici colle diecine, si riuniscono le due parole relative alle unità di ciascun ordine, facendo precedere quelle che esprimono le unità di second' ordine. Così *quarantadue* esprime la collezione di quattro unità di second' ordine e due di prim' ordine. Fanno eccezione a questa legge le parole *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, e *sedici*, nelle quali la parola che si riferisce alle unità semplici precede quella che si rapporta alle unità di second' ordine.

La parola *cento* esprime la collezione di dieci diecine o una unità dieci volte più grande della diecina: chiamasi unità di terz' ordine o delle *centinaja*. Per esprimere le collezioni di centinaja s'impiegano le parole *duecento* (*); *trecento*, *quattrocento*, ec., con legge costante.

La parola *mille* esprime dieci centinaja, o un' unità dieci volte più grande del centinajo. Le collezioni di queste unità fino al nove si esprimono colle parole *duemila*, *tremila*, ec.; e formano le unità di quart' ordine, dette anche *migliaja*.

Dopo le quali seguono le unità di quint' ordine, o le diecine di migliaia che si esprimono colle stesse parole radicali, cioè *diecimila*, *ventimila*, ec. Le unità di sest' ordine o le centinaja di migliaia si esprimono colle parole *centomila*, *duecentomila*, ec.

Le unità di settim' ordine, eguali a dieci di sesto, son dette *milioni*, voce derivata dalla parola mille. Poi seguono colla medesima legge le diecine di milioni; poi le centinaja

(*) Per vizzo di lingua si dice anche *dugento*, *dugencinquanta*, ec.

di milioni. Le unità del 10° ordine sono dette *bilioni*; e così, di tre in tre, seguono i *trilioni*, i *quadrilioni*, ec., fino all'infinito.

Per esprimere i numeri intermedi, quelli cioè che comprendono diversi ordini di unità, basta adoperare le voci che a ciascun'ordine si riferiscono. Così il numero: due milioni settecento quattromila duecento novantotto, esprime la collezione di due unità del 7° ordine, sette unità del sesto, quattro del quarto, due del terzo, nove del secondo e otto del prim'ordine.

Si tenga presente che ogni unità di ciascun ordine equivale a dieci unità dell'ordine da cui è preceduta.

7. Il modo di scrivere tutti i numeri possibili è in corrispondenza col modo di esprimerli; ma il sistema da cui è regolato, e che costituisce la numerazione scritta, è assai più semplice, perchè si fa uso di soli dieci caratteri e non va soggetto ad eccezioni. Per rappresentare i primi nove numeri si sono inventate le cifre seguenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno	due	tre	quattro	cinq̃ue	sei	sette	otto	nove

Queste stesse cifre sono state adoperate per rappresentare le collezioni di unità di tutti gli ordini stabilendo, conforme al sistema di numerazione parlata, che l'unità di un ordine qualunque debba valere dieci unità dell'ordine precedente, e che il posto che occupa una cifra nella serie delle cifre scritte debba indicare l'ordine di unità. Una cifra, scritta al primo posto a destra, indica unità semplici o di prim'ordine; scritta a sinistra delle unità o al secondo posto, unità di second'ordine o diecine; scritta a sinistra delle diecine o al terzo posto, rappresenta centinaja; e così di seguito. Il numero 347 indica 3 centinaja 4 diecine e 7 unità.

Volendo però scrivere un numero in cui manca qualche ordine di unità, vi è bisogno, allinchè ogni cifra rimanga al posto che le compete, di metter nel luogo di quella che manca un segno di niun valore. Si adopera per tale oggetto la cifra 0 che si chiama *zero*, che non ha valore per sè stessa, ma serve a determinare il posto che ciascuna cifra deve avere. Considerando per es. il numero 3700, s'intenderà che i due zeri alla destra non servono che a situare il 7 al terzo posto e il

3 al quarto. Questo numero può leggersi egualmente: tremila e settecento, o 37 centinaja. Secondo questo sistema il posto fa conoscere il valore dell'unità cui una cifra si riferisce, e gli ordini di unità si succedono come nel linguaggio ordinario. Si vegga nel numero qui scritto il nome che corrisponde al posto di ciascuna cifra.

5	7	3	2	9	6	0	4	2	3	1
dieciue di bilioni	bilioni	centinaja di milioni	dieciue di milioni	milioni	centinaja di migliaia	dieciue di migliaia	migliaia	centinaja	dieciue	unità

Il zero che si trova nel posto delle dieciue di migliaia indica, che non vi sono unità di quest'ordine.

Il sistema di numerazione è fondato sopra il principio, che ogni cifra, oltre il valore assoluto, ha un valore relativo al posto che occupa. Così la cifra 7 esprime sempre la collezione di 7 unità; ma l'unità cui si riferisce acquista un valore dieci volte più grande per ogni posto che avanza, camminando dalla destra verso la sinistra.

8. Si vede da ciò, che col solo scriver le cifre l'una adossata all'altra si può rappresentare qualunque numero per quanto grande esso sia, senza bisogno di ricorrere ad altri segni o modificazioni. È questo dunque un sistema che corrisponde benissimo a tutti i bisogni. Si osservi però che nella numerazione parlata si è adoperata una denominazione particolare per esprimere i primi quattro ordini di unità, cioè unità, dieciue, centinaja, migliaia. Non potendosi continuare con lo stesso sistema senza incorrere nell'inconveniente di aver bisogno d' infinite parole, si dovette abbandonare, e le unità degli ordini seguenti furono espresse per mezzo di parole composte. Per metter la scrittura in corrispondenza col linguaggio si è convenuto che i numeri scritti fossero divisi in classi di tre cifre l'una, cominciando dalla destra verso la sinistra. Risulta da questa disposizione, che ogni classe contiene unità, dieciue e centinaja. La prima classe è delle unità semplici, la seconda delle migliaia, la terza de' milioni, la

quarta de' bilioni , e così di seguito , siccome si vede scritto qui appresso .

trilioni	bilioni	milioni	migliaja	unità
324	058	396	204	502

La divisione delle classi è indicata col metter un poco di distanza fra i numeri.

Basta dunque saper leggere tre numeri per leggerli tutti , purchè però si sappia l'ordine con cui si succedono le classi , il che è facile. Il numero precedente si leggerà : trecento ventiquattro trilioni , cinquantotto bilioni , ec.

Colla stessa facilità si scrivono tutt'i numeri possibili sotto la dettatura , purchè si sappia scrivere un numero composto di tre cifre. La sola attenzione da usare consiste nel distinguere quali sono le unità che mancano , per mettere il zero in luogo di esse , avvertendo sempre che ogni classe dev' esser di tre cifre (*).

A R T. II.

Operazioni su i numeri interi.

9. Abbiamo veduto come possano comporsi tutti i numeri coll'aggiunger successivamente un' unità dopo l'altra. Questo

(*) L'esposto sistema di nomenclatura non è generalmente seguito , specialmente dagli Autori italiani. I quali chiamano bilione l'unità del quinto ternario , trilione quella del settimo , ec. ; e chiamano poi migliaia di milioni , migliaia di bilioni , ec. le unità del quarto , del sesto , ec. ternario ; e così procedendo di sei in sei cifre. Noi ci siamo attenuti a quello di sopra esposto : 1° perchè trovasi più universalmente adottato ; 2° perchè ci è sembrato più ragionevole ; 3° perchè di gran lunga più facile.

La divisione poi in classi di tre cifre l'una , non serve che a render più facile la lettura di un numero ; il quale oggetto tanto più facilmente si consegue quanto maggiore corrispondenza vi è tra la numerazione scritta e la parlata. Ma quando si tratta di un numero composto di moltissime cifre , il leggerlo non arreca alcun vantaggio , nè serve a farne concepir la grandezza ; sicchè riducendosi allora la cosa a dover contare il numero delle cifre , si può adottare qualunque altra divisione in classi. Ordinariamente si dividono le cifre a cinque a cinque , tanto perchè la ripetizione del 5 è facilissima , quanto perchè con un solo sguardo si distinguono benissimo le cinque cifre.

modo di composizione è troppo semplice per poter corrispondere a tutte le quistioni che possono presentarsi. Or le operazioni che si possono fare su i numeri hanno per oggetto la quistione generale seguente: Dati due o più numeri, comporne altri a cui i primi servono di elementi.

Le operazioni da farsi su i numeri non dipendono ordinariamente dalla natura o grandezza dell'unità, ma dal modo come colla ripetizione o divisione dell'unità principale si compongono altre unità di ordine superiore o inferiore. Le operazioni su i numeri interi, delle quali passeremo ad occuparci, dipendendo solo dal sistema di numerazione, possono considerarsi come fatte sopra numeri astratti.

§. I. Dell'Addizione.

10. L'*addizione* è un'operazione mediante la quale, dati più numeri, si cerca di comporne un altro che sia la riunione de' numeri dati, ossia che esprima quante volte l'unità è contenuta in tutti i numeri presi insieme. Il risultamento della operazione, ossia il numero che si cerca, si chiama *somma*.

11. Quando i numeri sono di una sola cifra, si fa l'addizione aggiungendo ad uno de' numeri dati successivamente tante unità quante se ne contengono nell'altro. Sicchè volendo a 7 aggiunger 4 si dirà: 7 più 1 fa 8, 8 più 1 fa 9, 9 più 1 fa 10, 10 più 1 fa 11. Si perviene così al numero 11 dopo quattro operazioni, nelle quali si è aggiunta sempre l'unità. Si può in seguito andar aggiungendo, in vece di una unità per volta, due o più unità; e basta un brevissimo esercizio per acquistar l'abitudine di eseguir a mente e con prontezza queste specie di addizioni.

Poichè 3 più 5 fanno 8, i numeri 3 e 5 si possono considerare come le parti di cui è composto il numero 8. Sotto questo punto di veduta la somma è il tutto, che risulta dalle diverse parti prese insieme; sicchè questa operazione ha per oggetto di risolvere il seguente problema: date le diverse parti che debbono comporre un tutto, trovare la quantità di cui si compone questo tutto.

12. Per eseguir l'addizione de' numeri composti di più cifre conviene osservare, che non possono riunirsi che numeri rapportati alla medesima unità. L'unità di un numero

può esser diversa da quella di un altro o per la sua natura o per la sua grandezza. Quando l'unità è di natura diversa, l'addizione non ha senso nè può eseguirsi; di fatto sarebbe impossibile sommar 3 libbre con 5 orc. Quando poi l'unità è di grandezza diversa, l'operazione non può aver luogo se non si riducono prima i numeri ad unità alla medesima grandezza. Quindi per sommare 3 diecine con 5 migliaja, bisogna ridurre le migliaja a diecine, e allora si tratterà di far la somma di 500 diecine con 3 diecine, il che dà 503 diecine.

Ciò premesso, se si hanno de' numeri composti di più cifre, è evidente che per trovarne la somma, bisogna riunire separatamente le unità del medesimo ordine, cioè le diecine fra loro, le centinaia fra loro, ec. Si avranno così tante somme parziali per quanti sono gli ordini di unità contenuti ne' numeri dati; e chiaro si vede che il numero risultante dalla riunione di tutte queste somme parziali esprimerà la somma totale. Se p. es. si volesse far la somma de' numeri 321, 213 e 412, si avrebbero le tre somme: 6 unità, 4 diecine e 9 centinaia, le quali riunite compongono il numero 946. L'operazione adunque è riportata all'addizione de' numeri di una sola cifra; e in effetti ogni somma parziale si trova collo stesso metodo, non avendovi alcuna influenza la grandezza dell'unità cui si riferiscono.

Sia ancora dato l'esempio posto in margine. Le somme parziali de' diversi ordini di unità sono 29, 26, 21, 17, cioè la somma richiesta è uguale a 29 unità, 26 diecine, 21 centinaia e 17 unità. In questo caso però non si è ottenuto un numero solo come nell'es. prec., perchè ogni somma parziale racchiude due cifre, cioè contiene anche unità dell'ordine superiore. Bisognerebbe dunque ripeter l'operazione sopra queste somme parziali, e si giungerebbe così al risultamento 19389. Si può però evitare questa seconda operazione, eseguendola insieme colla prima. In fatti la somma delle unità semplici è stata 29, numero composto di 9 unità e 2 diecine. Or come in seguito deve farsi la somma delle diecine, si scriverà il 9, e le 2 diecine si uniranno alle diecine de' numeri dati. La somma delle diecine insieme colle 2 diecine riportate è 28. Per la stessa ragione si scrive l'8, e le 2 diecine di diecine, ossia centinaia, si uniscono alle centinaia de' numeri dati. E proseguendo in tal modo, si ottiene la somma addimandata.

321

213

412

946

5728

297

3542

79

9743

29

26

21

17

19389

5728

297

3542

79

9743

19389

Nelle operazioni de' numeri è interessantissimo l' adottare tutti que' mezzi atti a renderle più brevi e meno soggette ad errori; giacchè non si arriva che con lungo esercizio ad eseguirle con celerità e sicurezza. Convien dunque: 1° per facilità scrivere i numeri l' uno sotto l' altro in modo che le unità del medesimo ordine sieno in colonne verticali; 2° per fare il riporto delle unità dell' ordine superiore ed ottenere il risultamento finale con una sola operazione cominciar le somme parziali dall'ordine inferiore, cioè dalla destra verso la sinistra; 3° e per evitare gli errori che potrebbero nascere da dimenticanza, cominciar l'addizione di ogni colonna dal numero che si riporta dalla somma precedente.

Ciò pòsto, per eseguir l' addizione si osserverà questa regola. *Scritti i numeri l' un sotto l' altro in modo che le unità del medesimo ordine si corrispondano in colonna verticale, si comincerà a far l' addizione delle unità semplici; se la somma sorpassa 9, si scrivono le unità e le diecine si riportano o si uniscono alla somma della colonna seguente. Si farà in seguito la somma de' numeri della 2.ª colonna come se fossero unità semplici, incominciando dalla cifra che si è riportata dalla somma precedente. Così si continuerà, finchè si perverrà alla somma dell' ultima colonna che si scrive per intero. La somma si separa da' numeri dati per mezzo di una linea.*

Ecco degli esempi.

275338	7540832
25742	573
558329	296547
5040	453825
237281	6930750
1101730	19225603

§. II. Della Sottrazione.

13. L' addizione e la sottrazione son due operazioni, l' una inversa dell' altra. Nell' addizione si cerca di comporre un numero per mezzo delle sue parti, che son date; nella sottrazione si ha per oggetto di decomporre un numero in due parti delle quali una è data. Così le due parti 5 e 3 per mezzo dell' addizione compongono il numero 8. Ma se è dato 8 e

una delle sue parti 5, la sottrazione ha per oggetto di trovar l'altra parte 3, che unita al 5 lo riproduca.

Il modo più semplice di eseguir questa operazione consiste nel toglier dal numero 8 successivamente tante unità quante ne sono in 5. In effetti 8 meno 1 fa 7, 7 meno 1 fa 6, ec., e dopo cinque operazioni si perviene al numero 3. Basta però il più breve esercizio per eseguir tali sottrazioni a mente; sicchè riguarderemo come cosa nota, che 9 meno 3 fa 4, che 13 meno 4 fa 9, ec.

Riguardata la sottrazione sotto questo punto di vista, il risultamento dell'operazione si chiama *resto*, in quanto che esprime ciò che rimane dopo aver tolto dal numero più grande tante unità quante se ne contengono nell'altro. Perciò si dice che da 8 tolto 5 il resto è 3. Ma con questa operazione si viene a conoscere pure di quanto un numero supera l'altro, e allora il risultamento si chiama *eccesso*, perciò si dirà che 3 è l'eccesso di 8 sopra 5. Si vien parimente a fare il paragone fra due numeri disuguali, e quindi a conoscere, indipendentemente dalla loro grandezza, di quanto è la loro ineguaglianza, e allora il risultamento della sottrazione prende il nome di *differenza*. La sottrazione ha dunque per oggetto: di togliere un numero da un altro, di conoscer di quanto un numero supera l'altro, in che un numero differisce da un altro. Perciò le parole *resto*, *eccesso*, *differenza*, quantunque applicate al risultamento di una inedita operazione, si riferiscono al diverso modo con cui si riguarda la decomposizione di un numero in due parti delle quali una è data.

14. Abbiain già detto che quando il numero da sottrarsi è di una sola cifra, l'operazione non ha bisogno di regole e si fa facilniente a memoria.

Se poi tutti due i numeri son composti di più cifre, si tratterà di operar separatamente sopra ciascun ordine di unità, cioè di sottrarre le unità dalle unità, le dieciue dalle diecine, ec. Scritti perciò, conformemente all'addizione, i numeri l'un sotto l'altro, si opererà dalla destra verso la sinistra. Dovendo per es. sottrarre 2327 da 7548, si dirà: da 8 tolto 7 resta 1, da 4 tolto 2 resta 2, da 5 tolto 3 resta 2, da 7 tolto 2 resta 5, e si avrà il resto 5221. È inoltre evidente che, togliendo da 7548 le diverse parti di cui è composto il numero 2327, si viene a toglier l'intero numero.

Per comodità di operare suol mettersi il numero più grande sopra e il più piccolo sotto ; il che fa intendere il significato delle parole, *numero superiore e inferiore*, che impiegheremo in seguito. Ma il modo di scrivere i numeri ha solamente per oggetto, come nell' addizione, il render più facile l' operazione.

Il resto si separa da' numeri dati per mezzo di una linea.

15. Può avvenire però che qualche cifra del numero superiore si trovi minore della cifra corrispondente del numero inferiore, come si vede nell' esempio notato a fianco.

In fatti da 3 non si può togliere 8, nè da 2 toglier 3, ec. Si rimedia a questo inconveniente dando un' altra disposizione ai diversi ordini delle unità del numero superiore; la quale consiste nello staccare un' unità dalla cifra dell' ordine seguente, e questa, convertita in dieci unità dell' ordine inferiore, si unirà alle unità dell' ordine su cui si sta operando. Passando poi alla colonna seguente, si conterà per una unità di meno la cifra del numero superiore. Perciò si dirà: da 13 tolto 8 resta 5, da 11 tolto 3 resta 8, da 17 tolto 9 resta 8, da 6 tolto 5 resta 1. E si vede che per poter eseguir la sottrazione si è decomposto il numero 7823 in un numero di unità, diecine, centinaja, migliaja, tali che ciascun ordine di esse sia maggiore delle corrispondenti nel numero 5938. La decomposizione eseguita è quella che si vede in margine.

$$\begin{array}{r} 7823 \\ 5938 \\ \hline 1885 \end{array}$$

Se nel luogo ove deve staccarsi un' unità, per unirla alla cifra dell' ordine inferiore, si trovasse il zero, si passerà alla cifra seguente; e se questa è pur zero, all' altra cifra; e così si andrà innanzi verso la sinistra, finchè si perverrà ad una cifra significativa che somministra l' unità richiesta. Allora la cifra su cui si sta operando si troverà aumentata di 10 unità, gli zeri che seguono varranno per 9, e la prima cifra significativa si dovrà intender diminuita di un' unità. Nell' esempio qui posto si dirà: da 13 tolto 6 resta 7, da 9 tolto 4 resta 5, da 9 tolto 7 resta 2, da 12 tolto 5 resta 7, da 4 tolto 2 resta 2. La decomposizione del numero superiore è quella che si vede a lato.

$$\begin{array}{r} 55003 \\ 25746 \\ 27257 \\ \hline 53003 \end{array}$$

Segue da ciò, che se il numero superiore è terminato da

molti zeri, il primo zero valerà 10, e tutti gli altri, 9; come si vede nell' annesso esempio. La qual cosa risulta evidente, osservando in (A) la decomposizione del numero 3700000, che si fa per render possibile la sottrazione sopra ciascun ordine di unità separatamente.

$$\begin{array}{r}
 \text{(A)} \\
 36 \\
 3700000 \quad 9999 \\
 \underline{2943274} \quad 10 \\
 756726 \quad 3700000
 \end{array}$$

Ad intendere ancor meglio la ragione di tutto ciò, è mestieri rammentarsi che il resto unito al numero minore dee riprodurre il numero maggiore. Or nell' annesso esempio si vede che 7 più il numero che si cerca non può produrre 2 ma 12; e così per le altre colonne. Si dirà dunque da 7 a 12 è 5, da 6 a 12 è 6, da 5 a 13 è 8, ec.

$$\begin{array}{r}
 57432 \\
 \underline{28567} \\
 28865
 \end{array}$$

16. Faremo ancora osservare, come cosa di per sè chiara, che se il numero superiore si aumenta o diminuisce di alcune unità, anche il resto sarà aumentato o diminuito di altrettante unità; e che se si aumenta o diminuisce il numero inferiore di alcune unità, il resto sarà diminuito o aumentato dello stesso numero. Si può dunque, in vece di diminuire di un' unità la cifra del numero superiore, aumentare di un' unità la cifra corrispondente del numero inferiore, e lasciar le cifre del numero superiore invariate. Si farà allora la sottrazione scrivendo per resto ciò che manca al numero inferiore per arrivare al numero superiore, e quando questo sorpassa 9 si aggiungerà un' unità alla cifra seguente del numero inferiore. Nell'esempio ultimo del n° prec. si dirà: da 7 a 12 è 5 e si scrive il 5; 6 più 1 fanno 7, a 13 è 6, e si scrive il 6; 5 più 1 fanno 6, a 14 è 8, e si scrive l' 8, ec.

Quest' ultima maniera di far la sottrazione è preferibile tanto per la sua facilità, quanto perchè trova il suo uso nella divisione (§.IV).

Ecco alcuni esempi.

$$\begin{array}{r}
 3750923 \\
 \underline{2864756} \\
 886167
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 543200 \\
 \underline{296734} \\
 246466
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7345638 \\
 \underline{6644763} \\
 700875
 \end{array}$$

17. La sottrazione di un numero da un altro composto dall' unità seguita da zeri si fa, prendendo ciò che manca per arrivare a 10 nella

prima cifra a destra , e ciò che manca per arrivare a 9 in tutte le altre. Per es. volendo sottrarre 3768 da 10000, si otterrà subito il resto dicendo: da 3 a 9 è 6, da 7 a 9 è 2, da 6 a 9 è 3, da 8 a 10 è 2; e si ha il resto 6232. Questo resto si chiama il *complemento aritmetico* del numero 3768. Con un breve esercizio si acquisterà l'abitudine di prender a memoria i complementi aritmetici de' numeri.

Si può cambiare la sottrazione in addizione aggiungendo al numero dato il complemento del numero da sottrarsi, e omettendo di scrivere l'ultima unità. Se per es. da 7834 si dovesse sottrarre 5247, si può a 7834 aggiungere il complemento di 5247 che è 4753. Fatta l'addizione, dell'ultima somma 12 si scrive il 2 e si tralascia l'1. In effetti se al numero 7834 si aggiun-

7834	7834
gesse 10000 si avrebbe 17834, da cui sottraendo 5247	5247
si avrebbe 12587. Or sottraendo 5247 da 10000 e poi	2587
aggiungendo il resto a 7834 non si fa che cambiare	2587

l'ordine delle operazioni, cioè nel primo caso si sottrae 5247 da 10000 unito a 7834, e nel secondo si sottrae lo stesso numero da 10000 e poi il resto si aggiunge a 7834. In amendue i casi si deve avere un risultamento che contiene 10000 di più. Per cui omettendo di scriver l'ultima unità, si ottiene il resto della sottrazione, cioè 2587.

Si può anche evitare di scrivere il complemento, e far nondimeno uso della somma, dicendo: 3 complementi di 7 a 10 e 4 fanno 7, 5 compl. di 4 a 9 e 3 fanno 8, 7 compl. di 2 a 9 e 8 fanno 15, (si scrive 5 e si riporta 1), 4 compl. di 5 a 9 e 8 con 1 che si riporta fanno 12, si scrive 2 e si lascia l'ultima unità. Si ha così lo stesso risultamento 2587 che si sarebbe ottenuto colla sottrazione.

Questa maniera è forse più semplice dell'ordinaria. Ma l'uso de' complementi riesce principalmente utile, quando si hanno molti numeri, de' quali alcuni si debbono sommare altri sottrarre; giacchè se in vece de' numeri da sottrarsi si scrivono i loro complementi, non si avrà che una semplice addizione da fare, avvertendo però di toglier tante diecine dall'ultima somma per quanti complementi si sono impiegati. Per es. si debbano sommare i tre numeri 2584, 3478, 2581 da cui si debbano sottrarre i due numeri 3192, 2748. Scrivendo i tre primi numeri e i complementi degli altri due, l'operazione si riduce ad un' addizione; e omettendo di scriver le due diecine dell'ultima somma, si ha il risultamento 3703, come si vede a lato.

2584
3478
2581
3192
2748
6808
8252
3703

Tuttocciò che si è detto suppone che i numeri dati sien composti del medesimo numero di cifre. Se non lo sono, si considereranno tali ponendo degli zeri nella sinistra di quelli di cui si prendono i complementi. Dalla somma de' due numeri 5434, 61583 si debba sottrarre la somma de' numeri 14378, 6543, 791, 13. Questi tre ultimi numeri si potranno considerare come se fossero 06543, 00791, 00013, i cui complementi sono 93457, 99209, 99987; sicchè si dovrà far la somma de' numeri posti in margine, e si ometteranno le 4 diecine dell'ultima somma. Così si praticherà in ogni altro caso.

5434
61583
85622
93457
99209
99987
45292

18. Siccome per mezzo de' complementi si può cangiar la sottrazione in addizione, si potrà parimenti far uso di essi per cangiar l'addizione in sottrazione. Supponiamo che si debbano sommare i due numeri 9578 e 2733; se del secondo numero si prende il complemento, e si sottrae da 9578, si ha per risultamento 2311, il quale contiene 10000 di meno. Aggiungendo una diecina al resto dato dall'ultima colonna, si ha la somma richiesta 12311. Questo metodo di rado o non mai s'impiega, nè l'abbiamo mostrato che per una estensione della teoria.

19. La parola complemento si può render più generale applicandola al resto di qualunque sottrazione. Così da 52 sottraendo 37 si ha per resto 15; ora 15 si può chiamare il complemento di 37 a 52. Se dunque si dovesse da 3754 sottrarre 2584, in vece di prendere il complemento a 10000 del secondo numero, si potrebbe prendere a un altro numero qualunque, e impiegare pure la somma come nel caso anzidetto. Ma allora il risultamento eccederebbe il vero valore per quanto è il numero a cui si è preso il complemento. Prendiamo per es. il compl. di 2584 a 11111 che è 8527, e sommandolo col numero 3754 si ha 12281 che differisce dal vero risultamento per 11111; sottraendo quest'ultimo numero da 12281, si ha 1170 che è il resto di 2584 tolto da 3754. Ma i complementi presi a questo modo non sono di alcuna utilità, e servirebbero piuttosto a complicare il calcolo; mentre i complementi a 10 che diconsi aritmetici, oltre alla facilità di poterli prendere a memoria, offrono il vantaggio che per ottenere il risultamento finale basta omettere di scrivere le decine dell'ultima somma.

20. Se si volesse all'addizione sostituire la sottrazione impiegando non i complementi a 10 ma ad un altro numero qualunque, il risultamento si dovrebbe aumentare di tante volte il numero a cui si è preso il complemento per quanti complementi si sono impiegati. Supponiamo per es. che al numero 52 si dovessero aggiungere i numeri 3, 7, 5. Se di questi numeri si prendono, per es., i complementi a 9 che sono 6, 2, 4; sottraendo da 52 questi ultimi numeri si ha 40, al quale numero mancano tanti 9 per la somma di 52, 3, 7 e 5 per quanti complementi si sono impiegati; e di fatto aggiungendo a 40 tre volte il 9 si ha 67, somma richiesta.

Vi è qualche caso in cui questa seconda maniera è preferibile. Per es. se vi fosse la condizione che dalla somma richiesta si dovesse togliere il 9 quante volte si può, operando nel modo esposto, si troverebbe già la somma diminuita di un certo numero di 9, e quindi l'operazione riuscirebbe più breve.

§. III. Della Moltiplicazione.

21. La *moltiplicazione* è una operazione che ha per oggetto di comporre un numero dietro la ripetizione di un numero dato. È dessa un'estensione del modo di comporre i nu-

meri per mezzo dell'aggiunta o ripetizione dell' unità (n° 5). Per es. aggiungendo il numero 3 a sè stesso si forma 6, e a questo aggiungendo 5 si forma 9, e aggiungendo nuovamente 3 si forma 12, e così di seguito. Questo è ciò che chiamasi moltiplicare il numero 3. Si dice poi con particolarità raddoppiare, triplicare, quadruplicare un numero, quando si ripete o due o tre o quattro volte. I numeri 6, 9, 12, ec. si chiamano i *multipli* di 3.

Basta l'addizione per eseguire questa operazione; e sotto questo rapporto può la moltiplicazione considerarsi come un caso particolare dell'addizione, quello cioè in cui i numeri da sommarsi sono tutti eguali fra loro. In effetti se il numero 16 si dovesse quadruplicare ossia moltiplicare per 4, si scriverà il 16 quattro volte, l'uno sotto l'altro, e la somma 64 esprimerà il numero cercato.

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

Non si potrebbe però far uso dell'addizione che quando un numero dev'esser ripetuto poche volte; in caso contrario l'operazione diverrebbe estremamente lunga. Per la qual cosa essendosi rinvenuto un metodo particolare per eseguirla in tutti i casi con la massima facilità e brevità, deve considerarsi la moltiplicazione come un'operazione totalmente distinta dall'addizione, e che non ha di comune colla medesima che la composizione de' numeri per aggiunzione.

Due soli numeri sono necessari per la moltiplicazione: uno è il numero che dev'esser ripetuto e che chiamasi *moltiplicando*; l'altro che chiamasi *moltiplicatore* indica, col numero delle unità che contiene, quante volte il moltiplicando dev'esser ripetuto. Il risultamento dell'operazione dicesi *prodotto*; e i due numeri dati si chiamano i *fattori* del prodotto. Quindi nell'esposto esempio 16 è il moltiplicando, 4 il moltiplicatore, e 64 il prodotto; 16 e 4 sono poi i fattori di 64.

Dietro all'idea che abbiamo assegnata al moltiplicatore, si può la moltiplicazione definire: *un'operazione mediante la quale si vuol comporre un numero per mezzo del moltiplicando della stessa maniera che il moltiplicatore è composto per mezzo dell'unità*. In effetti nel citato esempio il numero 64 è composto per mezzo del 16 come il 4 è composto per mezzo dell'unità; cioè se a comporre il 4 bisogna quattro unità, per comporre il prodotto 64 sono necessarie quattro quantità rappresentate dal 16.

22. Allorchè i numeri sono di una sola cifra, non vi sono regole a stabilire per trovarne il prodotto. I prodotti de' primi nove numeri si formeranno con l'aggiunta successiva del numero, nel modo indicato pel numero 3 (n° 20). E siccome questi prodotti sono necessari per poter eseguire la moltiplicazione de' numeri composti di più cifre, gioverà tener presente la seguente Tavola, che dicesi *Pitagorica*, perchè se ne attribuisce l'invenzione a Pitagora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La prima linea si forma aggiungendo sempre l'unità a sè stessa fino al numero 9. La seconda linea si forma aggiungendo successivamente il 2; la terza il 3, ec. Perciò la prima linea conterrà i numeri naturali fino a 9, la seconda i multipli di 2, la terza quelli di 3, ec.

Le linee verticali corrispondenti ai numeri 1, 2, 3, ec. sono identiche alle orizzontali corrispondenti agli stessi numeri.

Sarà facile quindi trovare per mezzo di questa Tavola i prodotti de' primi nove numeri. Volendo per es. il prodotto di 7 per 5, si cercherà nella linea che contiene i multipli

di 5 (che è la quinta), quello che corrisponde al 7 nella prima linea orizzontale; il che riviene a cercare il moltiplicando nella prima linea orizzontale e il moltiplicatore nella prima linea verticale. Il numero, che appartiene tanto alla linea verticale del primo numero che alla orizzontale del secondo darà il prodotto richiesto. Cercando nel modo indicato, si troverà 35 per prodotto di 7 per 5.

23. Potendosi la tavola di Pitagora formare egualmente e per linee orizzontali e per colonne verticali, ne risulta che il prodotto di 7 per 5 è lo stesso che quello di 5 per 7; vale a dire che, qualunque di questi numeri si consideri per moltiplicando, il prodotto è sempre lo stesso. Questa proprietà ha luogo non solo pe' numeri compresi nella tavola di Pitagora, ma per tutti i numeri possibili. Si debba per es. moltiplicare 5 per 3; si scriva in una linea 5 volte l'unità, e poi si scrivano tre di queste linee; si troveranno così scritte 15 unità. Or se il numero delle unità si conta per linee orizzontali, si avranno 5 unità ripetute tre volte, e se si conta per colonne verticali si avranno 3 unità ripetute 5 volte. Ma in amendue i casi il numero delle unità è lo stesso; dunque 5 moltiplicato per 3 è uguale a 3 moltiplicato per 5. Il ragionamento impiegato per dimostrar questa verità essendo indipendente da' numeri 3 e 5 presi ad esempio, ne segue, che nella moltiplicazione di due numeri il prodotto non varia con qualunque ordine si prendano i fattori.

24. Stando all'idea che deve attaccarsi alla moltiplicazione ed al significato delle parole moltiplicando e moltiplicatore, si vede che quando il moltiplicando è di più cifre, si tratterà di ripeter le sue unità, decine, centinaia, ec. tante volte, per quante sono le unità del moltiplicatore; ossia, si tratterà di eseguir l'operazione sopra ciascun ordine di unità, e poi riunire i risultamenti. Supponiamo che si debba moltiplicare 357 per 3; non bisognerà che ripeter 3 volte le 7 unità, le 5 decine e le 3 centinaia, e poi riunire i risultamenti ottenuti. In effetti è questo quello che si farebbe se si sommasse 357 due volte con sè stesso. Basta dunque, per eseguir questa operazione, conoscer i prodotti di 3 per 7, di 5 per 3, e di 3 per 3, e considerare il

$$\begin{array}{r}
 357 \\
 \times 3 \\
 \hline
 1071
 \end{array}$$

primo come unità semplici, il secondo come diecine, il terzo come centinaia. Sicchè scrivendo questi prodotti l'uno sotto l'altro e nel posto che a ciascun ordine corrisponde, e poi facendone la somma, si ha il prodotto 1071.

Si può nondimeno evitare di scrivere questi prodotti parziali, e ottenere immediatamente il prodotto totale, riunendo, come nell'addizione, le diecine di ogni prodotto parziale al prodotto parziale della cifra che segue. Così nell'esem. proposto si dirà: 3 per 7 fa 21, si scrive l'1 e le 2 diecine si ritengono per unirle al prodotto seguente; poi 3 per 5 fa 15 e 2 che si riportano, 17, si scrive il 7 $\begin{array}{r} 357 \\ 3 \end{array}$ e si ritiene l'1; 3 per 3 fa 9 e 1 che si riporta, $\begin{array}{r} 1071 \end{array}$ 10; e siccome non vi sono più cifre nel moltiplicando, si scrive il 10 interamente.

È chiaro dunque il metodo da tenersi, allorchè il moltiplicando è di più cifre e il moltiplicatore è di una sola cifra. Il prodotto totale si ottiene con una sola operazione; ma non bisogna mai dimenticare che questo prodotto totale è composto di tanti prodotti parziali per quante sono le cifre del moltiplicando.

25. Segue da ciò, che le cifre del prodotto sono sempre della stessa natura, ossia esprimono unità della medesima specie, di quelle del moltiplicando. Se dunque il moltiplicando è seguito da uno o più zeri, si può durante l'operazione far astrazione dagli zeri, che poi si aggiungeranno in egual numero al prodotto. Nell'esempio posto in margine, il prodotto di 759000 per 7 si fa, facendo quello di $\begin{array}{r} 759000 \\ 7 \end{array}$ 759 per 7; e poi a questo prodotto, per far che rappresenti migliaia, si aggiungeranno tre zeri a destra. $\begin{array}{r} 5313000 \end{array}$

26. Prima di passare al caso in cui il moltiplicatore contiene più cifre, dimostreremo alcune importanti proposizioni.

I. Un numero, se si moltiplica per 6, per 7, ec., si vien a render sei, sette, ec. volte più grande. Moltiplicare perciò un numero per 10 significa renderlo dieci volte più grande. Ma secondo il sistema di numerazione ogni cifra acquista un valore dieci volte più grande passando di un posto dalla destra verso la sinistra (n° 7), perciò si moltiplica un numero per 10 facendo avanzare di un posto tutte le cifre verso la sinistra, ossia aggiungendo un zero nella destra. Si vede an-

cora che per moltiplicarlo per 100, per 1000, ec. basterà aggiungere due zeri, o tre, ec.

II. Se il moltiplicatore si moltiplica per 2, per 3, ec., il prodotto che ne risulta sarà doppio, o triplo, ec. di quello che si sarebbe ottenuto dal moltiplicatore semplice. Supponiamo per es. che si debba moltiplicare 358 per 4. Se questa moltiplicazione si fa per mezzo dell'addizione, si avrà

358
358
358
358
1432

la somma di quattro numeri eguali a 358. Prendendo per moltiplicatore un multiplo qualunque di 4, si dovrà scrivere tante volte il 358 per quante unità contiene il nuovo moltiplicatore. Ora è chiaro che tutti questi numeri da sommarsi si potranno dividere in tanti gruppi di quattro linee l'uno per quanto è il numero per lo quale si è moltiplicato il 4. Ognuno di questi gruppi essendo uguale a 1432, si dovrà ripetere il 1432 tante volte per quante unità contiene il nuovo fattore del moltiplicatore 4. Tanto è dunque moltiplicare 358 per 12 per es., quanto moltiplicarlo prima per 4 e poi moltiplicare il prodotto ottenuto per 3. Se dunque si moltiplica un numero per un altro, e poi il prodotto per un altro, e così di seguito, è come se il primo numero si fosse moltiplicato immediatamente pel prodotto di tutt' i moltiplicatori.

La definizione della moltiplicazione (n° 22) rende ciò più evidente. Giacchè se devesi moltiplicare 358 per 12, bisogna comporre per mezzo di 358 un numero dello stesso modo che 12 è composto per mezzo dell'unità. Ora 12 si può comporre o ripetendo l'unità 12 volte, o pure prendendo prima l'unità 4 volte e poi ripetendo 3 volte quello che si è ottenuto; perciò si otterrà lo stesso prodotto o ripetendo 358 dodici volte, o pure moltiplicando il detto numero prima per 4 e poi ripetendo quel che si è ottenuto tre volte.

III. Il prodotto di più fattori non varia, secondo qualunque ordine si moltiplicano i fattori. Sia da moltiplicarsi 7 per 3 per 5. Si potrà moltiplicare 7 prima per 3 e poi per 5, o pure 7 per 15, e si avrà lo stesso prodotto (II.). Ma 15 risultando dal prodotto de' due fattori 3 e 5, si potrà fare, o 3 moltiplicato per 5, o 5 moltiplicato per 3 (n° 23); perciò 7 moltiplicato per 15 potrà risultare o da 7 moltiplicato per 3 e poi per 5, o da 7 moltiplicato per 5 e poi per 3. Sarà dunque il prodotto 7 per 3 per 5 eguale a quello di 7 per 5 per 3. Ma 7 per 3 è lo stesso che 3 per 7, dunque il prodotto stesso sarà eguale a quello di 3 per 7 per 5.

Così si continuerebbe dando a' tre fattori tutte le situazioni possibili. La stessa dimostrazione ha luogo per un numero di fattori maggiore di tre.

27. Posti questi principii, se il moltiplicatore è composto di una sola cifra significativa seguita da zeri, si farà la moltiplicazione come se gli zeri non vi fossero, e poi se ne aggiungerà un egual numero al prodotto. Giacchè essendo 400 eguale a 4 moltiplicato per 100, si moltiplica un numero per 400, moltiplicandolo prima per 4 e poi il prodotto ottenuto per 100 (n° prec.) Parimenti si moltiplica per 3000 moltiplicando per 3 e aggiungendo tre zeri al prodotto, per 70 moltiplicando per 7 e aggiungendo un zero al prodotto.

Si debba ora moltiplicare 3578 per 486. Ciò corrisponda a ripeter 3578 6 volte più 80 volte più 400 volte, o in altri termini a moltiplicarlo per 6 per 80 e per 400, e poi a riunire questi prodotti parziali. Ma per moltiplicare per 80 basta moltiplicare per 8 e situare la prima cifra del prodotto al posto delle diecine; per moltiplicare per 400 basta moltiplicare per 4 e scrivere la prima cifra al posto delle centinaia; perciò scritti l'uno sotto l'altro i prodotti parziali, coll'avvertenza di situar la prima cifra di ognuno nel posto che ha la cifra del moltiplicatore, la somma di questi prodotti parziali darà il prodotto totale.

$$\begin{array}{r}
 3578 \\
 486 \\
 \hline
 21468 \\
 28624 \\
 14312 \\
 \hline
 1738908
 \end{array}$$

Da ciò risulta che la moltiplicazione de' numeri composti non richiede che la conoscenza de' prodotti de' numeri di una sola cifra, ossia di quelli contenuti nella tavola di Pitagora. È dunque interessantissimo lo imprimerli bene nella memoria.

28. Ecco nondimeno alcune osservazioni da tenersi presenti, nell'intraprender l'operazione.

1° Se fra le cifre del moltiplicatore vi è qualche zero, si passerà alla cifra seguente; ma bisogna mettere attenzione nel situare la prima cifra del prodotto parziale, la quale deve sempre corrispondere al posto che ha nel moltiplicatore, come si vede in (A). Qualche volta per evitar gli errori si suole scriver

(A) $ \begin{array}{r} 573428 \\ 200402 \\ \hline 1146856 \\ 2283912 \\ \hline 1146856 \\ 114915138056 \end{array} $	(B) $ \begin{array}{r} 573428 \\ 200402 \\ \hline 1146856 \\ 0 \\ 2283912 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1146856 \\ 114915138056 \end{array} $
--	--

un zero nel principio della linea che manca, come si vede praticato in (B). Con ciò si ha il vantaggio di osservare ogni prodotto parziale avanzar di un sol posto verso la sinistra. Del resto questa precauzione è inutile quando si usa la necessaria attenzione.

2° Se il moltiplicatore è terminato da zeri, per quel che si è detto (n° 6) si farà l'operazione come se gli zeri non vi fossero, e poi si aggiungeranno in egual numero al prodotto. Lo stesso si è detto doversi fare riguardo al moltiplicando (n° 25); perciò quando i due fattori son terminati da zeri, si farà la moltiplicazione senza avervi considerazione, e poi al prodotto se ne aggiungeranno tanti quanti ne contengono i due fattori. L' annesso esempio fa conoscer come bisogna regularsi.

$$\begin{array}{r}
 375400 \\
 48000 \\
 \hline
 30032 \\
 15016 \\
 \hline
 18019200000
 \end{array}$$

3° Il modo di scrivere i numeri può esser indifferente, allorchè nell' esecuzione si usa tutta l' attenzione necessaria per evitare gli errori. Giova però scrivere i numeri in modo che la prima cifra (a destra) del moltiplicatore corrisponda sotto la prima cifra del moltiplicando, tanto per maggior facilità, quanto per servire ad una certa regolarità; la quale esige che le cifre de' prodotti parziali, come esprimenti unità del medesimo ordine di quelle del moltiplicando, corrispondano con queste nella stessa colonna verticale.

Esempi di moltiplicazione.

$$\begin{array}{r}
 375852 \\
 759 \\
 \hline
 3382488 \\
 1879160 \\
 2630824 \\
 \hline
 285256488
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 607360 \\
 847 \\
 \hline
 425152 \\
 242944 \\
 485888 \\
 \hline
 154453920
 \end{array}$$

29. Si può, prima di eseguir la moltiplicazione, conoscer quante cifre deve avere il prodotto. Infatti se il moltiplicatore è di una sola cifra, ogni cifra del moltiplicando dà una cifra nel prodotto; solamente l' ultimo prodotto può esser di una cifra o di due. In conseguenza il prodotto avrà, o un numero di cifre eguale a quelle del moltiplicando, o una di più. Basta ordinariamente osservare la prima cifra (a sinistra) del moltiplicando per decidere quale de' due casi abbia luogo.

Allorchè il moltiplicatore è di più cifre, si osserverà il prodotto che risulta dall' ultima cifra del moltiplicatore, il quale darà tante cifre o una di più di quelle del moltiplicando. Ora a questo prodotto biso-

gna aggiunger tanti zeri quante sono le cifre rimanenti del moltiplicatore; perciò le cifre del prodotto saranno o quanto quelle de' due fattori o una di meno.

Potendosi invertire l'ordine de' fattori, senza che venga a alterarsi il prodotto, gioverà de' due fattori prender per moltiplicatore quello che ha meno cifre. Si farà allora un minor numero di prodotti parziali; e siccome ogni prodotto parziale può contenere una cifra di più del moltiplicando, si scriveranno meno cifre, e l'operazione riuscirà più breve.

§. IV. Della divisione.

30. La *divisione* è l'operazione inversa della moltiplicazione, come la sottrazione lo è dell'addizione. Giacchè, dati due numeri, per mezzo della moltiplicazione se ne trova il prodotto; ma se in vece fosse dato il prodotto e uno de' fattori, l'operazione che serve a trovar l'altro fattore, chiamasi *divisione*. Sia dato per es. il numero 64 come prodotto, e il 16 come fattore di 64, la divisione ha per oggetto di trovare l'altro fattore 4, il quale moltiplicato per 16 produca 64.

Siccome coll'addizione si può eseguire una moltiplicazione, basterebbe la sottrazione per effettuar la divisione. Di fatto il 64 è composto del 16 ripetuto tante volte per quante unità si trovano nel fattore che si cerca. Se dunque da 64 si toglie il 16 quante volte si può, osservando che dopo quattro sottrazioni non vi è più resto, si conchiuderà che bisogna ripeter il 16 quattro volte per ottenere il 64, e che quindi il fattore richiesto è 4. Con questa operazione si vien parimenti a conoscer quante volte il 16 è contenuto in 64.

Ha poi ricevuto il nome di divisione, perchè serve appunto a dividere un numero in parti eguali. Di fatti se si volesse, o sapere di quante parti eguali a 16 è composto 64, o pure dividere il 64 in 16 parti eguali, bisognerebbe considerare 64 come prodotto e 16 come uno dei fattori; e il fattore 4 rinvenuto indicherebbe, nel primo caso che 64 è composto di 4 parti eguali a 16, e nel secondo che è composto di 16 parti uguali a 4.

Qualunque sia il punto di vista sotto il quale si riguarda questa operazione, il suo oggetto è sempre la decomposizione di un numero in due fattori de' quali uno è dato.

Il numero che deve dividersi si chiama *dividendo*; quello pel quale si deve questo dividere, si dice *divisore*; e il fattore che si ottiene, *quoziente*.

E siccome il divisore moltiplicato pel quoziente deve riprodurre il dividendo, si può (n° 22) *il dividendo considerare composto rispetto al quoziente come il divisore lo è rispetto all' unità.*

31. Se per eseguire la divisione si volesse far uso della sottrazione, si andrebbe incontro ad una operazione lunga e pressochè impraticabile in molti casi. Esiste perciò un altro metodo dipendente del modo come si forma il prodotto di due numeri. Prima di esporlo faremo osservare che il quoziente di un numero diviso per 2 si dice esserne la *metà*; diviso per 3, per 4, per 5, ec., si dice la sua parte *terza*, *quarta*, *quinta*, ec. I quozienti interi di un numero diviso per 2, per 3, per 4, per 5, ec. si chiamano *summultipli* del numero dato. I summultipli di un numero ne sono una parte *aliquota*.

Dippiù, dividere un numero per 6, 7, ec. significa renderlo sei, sette, ec. volte minore. Se dunque si cancella un zero alla destra di un numero, ogni cifra, e quindi il numero stesso, acquistando un valore dieci volte minore, sarà diviso per 10. Parimenti cancellando due, tre, ec. zeri alla destra, il numero sarà diviso per 100, per 1000, ec.

32. Se il dividendo è di una o due cifre e il divisore di una sola cifra, il quoziente dev'esser necessariamente di una sola cifra. Sarà facile trovarlo conoscendo i prodotti de' primi nove numeri; in caso diverso si ricorrerà alla Tavola di Pitagora (n° 22). Se si vuole per es. il quoziente di 35 diviso per 7, si cercherà 7 nella prima linea orizzontale, e discendendo verticalmente fino a che si trovi 35, si vedrà che il primo numero della linea orizzontale in cui sta il 35 è 5; e questo è il quoziente richiesto.

Poichè i multipli di un numero si possono formare aggiungendo sempre lo stesso numero alla somma ottenuta, ne segue che da un multiplo all'altro successivo vi sarà l'intervallo di tante unità per quanto è il numero stesso meno una. Guardando per es. nella tavola di Pitagora i multipli di 6, si vedrà che essi sono 6, 12, 18, ec., e che dall'uno all'altro vi sono altri cinque numeri intermedi. Se dunque si dovesse dividere 38 per 6, non trovandosi 38 fra i multipli di 6, la divisione non può effettuarsi esattamente. La quistione allora riducesi a trovare il quoziente del più gran multiplo di 6 contenuto in 38.

Ecco la regola da seguirsi nel far questa operazione. *Disposti per maggior comodo i numeri l'una a fianco dell'altro, e separati per mezzo di linee, tanto il dividendo quanto il quoziente, dal divisore, si prenderà il primo dividendo parziale o di una o di due cifre, secondo che la prima cifra del dividendo è maggiore o minore della prima cifra del divisore; trovata la cifra del quoziente, si farà il prodotto di questa cifra pel divisore, per sottrarlo dal dividendo parziale. A fianco del residuo si scriverà la cifra seguente del dividendo, e si avrà un secondo dividendo parziale, sul quale si opererà nello stesso modo.*

Da ciò risulta, che le diverse cifre che si ottengono nel quoziente rappresentano unità del medesimo ordine di quelle de' dividendi parziali, o in altri termini, delle cifre del dividendo che si calano. Quindi se qualche dividendo parziale non contenesse il divisore, il quoziente non avrà cifre di quell'ordine. In tal caso si scriverà un zero nel quoziente, e si calerà la cifra seguente, siccome mostra l'annesso esempio.

$$\begin{array}{r|l} 4056 & 8 \\ 48 & 607 \\ \hline 56 & \\ 56 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

34. Allorchè il divisore è di una sola cifra, i dividendi parziali non possono essere che di una o di due cifre, e sarà facile in conseguenza fare le sottrazioni senza scrivere i prodotti del divisore per le rispettive cifre del quoziente. Nell'esempio qui posto a lato si dirà: 6 in 44 entra 7 volte e si scrive il 7; 6 per 7 fa 42 a 44 è 2, si scrive il 2 sotto il 44 e si cala il 3. Di poi, scritta la seconda cifra 3 del quoziente, si dirà: 6 per 3 fa 18 a 23 è 5, si scrive il 5 e si cala il 3 per avere il terzo dividendo parziale. Così si continuerà.

$$\begin{array}{r|l} 443364 & 6 \\ 23 & 73894 \\ 53 & \\ 56 & \\ 24 & \\ 0 & \end{array}$$

Non solo in questo caso si può far uso dell'esposto compendio, ma dopo un breve esercizio si potrà scrivere immediatamente il quoziente sotto il dividendo, senza scrivere i dividendi parziali. Nell'esposto esempio si dirà: 6 in 44 entra 7 volte, e si scrive il 7; resta 2 che unito al 3 fa 23; 6 in 23 entra 3, si scrive il 3 e resta 5 che unito al 3 fa 53; 6 in 53 entra 8, si scrive 8 e resta 5 che unito al 6 fa 56; 6 in 56 entra 9, si scrive il 9 e resta 2 che unito al 4

$$\begin{array}{r|l} 443364 & 6 \\ 73894 & \end{array}$$

fa 24; 6 in 24 entra 4, si scrive il 4; e siccome non vi è resto, l'operazione è finita.

È utilissimo l'esercitarsi a fare mentalmente queste specie di decomposizioni.

35. Passiamo al caso in cui anche il divisore è di più cifre. L'andamento dell'operazione è lo stesso; solamente i dividendi dovranno aver tante cifre quante ne ha il divisore o una di più. Si debba per es. dividere 574382 per 768. È chiaro che per primo dividendo parziale deve prendersi necessariamente

Dividendo.....	574382	768	Divisore.
	5376	747	Quozien.
2. ^o divid. parz....	3678		
	3072		
3. ^o divid. parz....	6062		
	5376		
Resto.	686		

divisore è contenuta in 57. Si trova che vi è contenuta 8 volte; si farà il prodotto di 768 per 8, e siccome questo prodotto è 6124 maggiore di 5743, la cifra 8 è troppo grande. Si sperimenta il 7, e fatta la moltiplicazione di 768 per 7 si trova 5376 che è minore di 5743; per cui la cifra 7 è esatta. Scritta questa cifra al quoziente, e il prodotto di 768 per 7 sottratto dal dividendo parziale 5743, si avrà il resto 367. Si calerà la cifra 8 del dividendo, e si avrà un secondo dividendo parziale 3678, sul quale si opererà come sul primo. Si trova per seconda cifra del quoziente 4 e per secondo resto 606. Calata la cifra 2, si avrà il terzo dividendo parziale 6062, che dà per terza cifra del quoziente 7 e per resto 686. Si vede da questo esempio, che l'operazione dev'esser condotta come nel caso in cui il divisore è di una sola cifra.

Se la cifra scritta nel quoziente è troppo grande, si conoscerà da che moltiplicata pel divisore dà un prodotto maggiore del dividendo parziale; se è troppo piccola, il prodotto di essa cifra pel divisore, sottratto dal dividendo, darà un resto maggiore del divisore. Nel primo caso si diminuirà la cifra di un'unità, nel secondo si dovrà aumentare (*).

(*) Se avverrà di scrivere al quoziente una cifra o troppo grande o troppo piccola, il che si avverte dopo fatto il prodotto, non è neces-

Per evitare gli errori che potrebbero risultare calando una cifra per un'altra, si segneranno con un accento le cifre del

sario cancellar l'operazione eseguita e rifar di nuovo il prodotto del divisore per la cifra corretta del quoziente. Il seguente esempio mostrerà chiaramente come bisogna in simil caso regolarsi,

16284'9'8'8'6'	5673	
11346	29606	
2. ^o divid. parz. 4938 9'	87	
51057		
Resto non esatto. 98332		(si scrive 8 invece di 9 al quoziente).
5673		
Resto corr. 4005		
3. ^o divid. parz. 40058'		In pratica la cifra che si cala si scrive
34038		(immediatamente vicino al resto).
Resto magg. del divis. 6020		(nel quoziente si scrive 7 in vece di 6).
5673		
Resto corr. . . . 347		
4. ^o divid. parz. 3478'		
5. ^o divid. parz. 34786'		(In pratica le due cifre calate 8 e 6 si
34038		sarebbero scritte immediatamente a
Resto 748		destra del resto 347).

Dopo aver ottenuta la prima cifra 2 del quoziente si ha il resto 4938, e calata la cifra seguente 9 si ha il 2.^o dividendo parziale 49389. Siccome 5 entra in 49 nove volte, si supponga essersi scritto 9 al quoziente. Il prodotto del divisore per 9 è 51057, maggiore del dividendo parziale. La qual circostanza ci annuncia che la cifra 9 del quoziente dev'esser diminuita almeno di un'unità. In vece di cancellare questo prodotto e scrivervi quello del divisore per 8 (cifra corretta del quoziente), si farà la sottrazione supponendo la prima cifra (a sinistra) del dividendo parziale aumentata di una diecina, cioè si sottrarrà 51057 da 149389, e si avrà il resto 98332; a questo aggiungendo il divisore 5673, e omettendo di scriver l'ultima diecina, si ha 4005 che è appunto il resto esatto, che si sarebbe ottenuto sottraendo dal dividendo parziale il prodotto di 5673 per 8. Infatti siccome il numero 51057 si trova aumentato di 5673, è chiaro che non si cambierebbe il resto se si aumentasse della stessa quantità il numero 49389 (n° 16). Operando nel modo indicato non si fa che invertir l'ordine delle operazioni, giacchè al resto si aggiunge il numero 5673, e cancellando l'ultima diecina si viene a togliere il 10000 che si era da prima aggiunto per render la sottrazione possibile. Questa operazione è identica a quella che si fa co' complementi aritmetici (n° 17); e di fatto 98332 non è

dividendo a misura che si calano, come si vede fatto nell'esposto esempio.

36. Per conseguenza :

1° Le cifre del quoziente saranno dello stess' ordine di quelle de' dividendi parziali. In effetti nell'addotto esempio il primo dividendo parziale 5743 esprime centinaja del pari che la prima cifra 7 del quoziente. Il primo resto che è 367 centinaja, convertito in diecine è unito alle 8 diecine del dividendo, dà 3678 diecine, e la cifra corrispondente 4 del quoziente è diecine. Così per le altre ;

2° Se qualche dividendo parziale non contenesse il divisore, si scriverà zero nel quoziente e si calerà la cifra seguente;

3° Si può da principio determinare il numero delle cifre del quoziente, poichè debbono esser tante quante sono le cifre che si calano, più quella relativa al primo dividendo parziale;

4° Ogni quoziente parziale, dovendo esser di una sola cifra, non potrà esser maggiore di 9.

37. La sola difficoltà riducesi a stabilire con precisione quante volte il dividendo contiene il divisore, a fin di evitare i tentativi inutili. Per far conoscer come debba operarsi, supponiamo che si sia diviso 34471 per 7, si avrà per quoziente 4973. Per trovar questo quoziente, bisogna decomporre il dividendo in migliaia, centinaja, diecine e unità, tali che ciascuna di queste classi

34811	7
4973	—

 contenga il 7 un numero esatto di volte. Ma se dovesse

che il complemento aritmetico del resto di 49389 sottratto da 51057; e siccome il resto di cui si parla si dovrebbe sottrarre da 5673 per avere il risultamento che si cerca, il complemento aritmetico fa caugiar la sottrazione in addizione.

Ottenuto il terzo dividendo parziale 40058, si supponga essersi scritta la cifra 6 nel quoziente. Moltiplicando il divisore per 6 si ha per prodotto 34038 che sottratto dal dividendo suddetto dà un resto 6020, maggiore del divisore; il che mostra che la cifra del quoziente deve essere aumentata di un' unità. Ma senza fare il prodotto del divisore per 7 è evidente che basterà sottrarre da 6020 il divisore 5673, e si avrà 347 che è lo stesso resto che si sarebbe ottenuto facendo il prodotto di 5673 per 7 e sottraendolo dal dividendo parziale 40058.

E' necessario nel calcolare il ridurre le operazioni al minor numero possibile; e quindi conviene di non perdere alcun calcolo fatto, e trarre profitto anche dagli errori. L'esposto metodo si seguirà ancora, quando si fa uso del compendio di non scrivere i prodotti parziali, siccome si dirà al n° 39.

dividersi 34811 per 4973, secondo la regola assegnata (n° 35) si deve prender 8 per cifra del quoziente. Or affinché 8 sia cifra esatta, bisogna che 34811 si possa decomporre in migliaia, centinaia, decine ed unità, sicchè tutte contengano 8 volte le migliaia, centinaia, ec. del quoziente. Si farà dunque 7 in 34 entra 8 volte e resta 2; unito il 2 colla cifra seguente dà 28, che non contiene 8 volte le 9 centinaia del divisore. Perciò la cifra 8 è troppo grande. Si farà lo stesso tentativo con 7. In effetti il 4 fatto entrare in 34 sette volte dà per resto 6 che unito a 8 dà 68. Il 68 contiene 7 volte il 9 (seconda cifra del divisore) e dà per resto 5, che unito alla cifra seguente dà 51. Il 51 contiene pure 7 volte il 7 e dà per resto 2 che unito a 1 dà 21, numero che contiene pure il 3 sette volte. Da ciò si conchiude che la cifra 7 è esatta. Si vede che con questa operazione fatta mentalmente si viene a decomporre il numero 28
34821 in 28 migliaia, 63 centinaia, 49 decine e 21 unità, 63
ciascuna delle quali divisa rispettivamente per le cifre 4, 9, 49
7, e 3 del divisore dà per quoziente 7. Questi sono in effetti 21
i diversi prodotti parziali che si ottengono, moltiplicando 4973 34811
per 7.

È raro che si debba spingere il tentativo fino all'ultima cifra, giacchè se si arriva a un resto che unito alla cifra seguente non contiene più lo stesso numero di volte la cifra corrispondente del divisore, la cifra del quoziente è troppo grande. Se poi si perviene a un resto almeno eguale alla cifra stabilita nel quoziente, è inutile proseguire il saggio, e la cifra è giusta. Nell'esempio qui annesso si ha per primo dividendo parziale 27743. Or 4 in 27 entra 6 volte e resta 3 che unito al 7 fa 37; il 9 in 37 non entra 6 volte, per cui 6 è troppo grande. Si prende 5. Come 4 per 5 fa 20, sottratto da 27, dà per resto 7 che unito al 7 dà 77. Il 9 in 77 entra 5; ma il resto essendo assai maggiore di 5, è inutile seguir più oltre. Il secondo dividendo parziale è 28782, che differendo poco dal primo, fa conoscere immediatamente che la cifra del quoziente è pure 5. Il terzo dividendo parziale è 39179. Or 4 in 39 entra 9 volte e resta 3, che unito all'1 dà 31. Siccome 9 in 31 non entra 9 volte, si prenderà 8 per cifra del quoziente. Il 4 in 39 fatto entrare 8 volte dà per resto 7 che unito all'1 dà 71. Il 9 in 71 non si contiene 8 volte; per ciò si prenderà 7. Essendo 7 per 4 eguale a 28, sottratto da 39 dà per resto 1 che è maggiore di 7, per cui la cifra 7 è buona.

$$\begin{array}{r|l}
 2774329 & 4973 \\
 24865 & 557 \\
 \hline
 28782 & \\
 24865 & \\
 \hline
 39179 & \\
 34811 & \\
 \hline
 4368 &
 \end{array}$$

38. Se il dividendo ed il divisore son terminati da zeri, cancellandone in ciascuno un egual numero, il quoziente non è alterato; e gli zeri soppressi si ristabiliranno nel resto (se vi è). Di fatto se si dovesse dividere 51000 per 600 il quoziente è identico a quello di 510 per 6; giacchè i due zeri che si son soppressi tanto nel dividendo che nel divisore non hanno fatto che cangiare il nome dell'unità; e

51000 ovvero 510 centinaia diviso per 600 ovvero per 6 centinaia debbono dare lo stesso quoziente che 510 unità divise per 6 unità. Parimenti 45000 diviso per 6000 dà lo stesso quoziente che 45 migliaia diviso per 6 migliaia; ma il resto 3, esprimendo 3 migliaia, deve scriversi 3000. Si possono dunque dividere per 10, 100, 1000, ec. il dividendo e il divisore; il quoziente non si altera. Si dimostrerà in seguito che la stessa proprietà ha luogo quando si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero il dividendo e il divisore.

Ecco alcuni esempi di divisione.

$$\begin{array}{r}
 758'3'4'7'2' \\
 \underline{743} \\
 15\ 3'4' \\
 \underline{14\ 8\ 6} \\
 48\ 7'2' \\
 \underline{44\ 5\ 8} \\
 414
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 743 \\
 \hline
 10206
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1578'7'2'0'100 \\
 \underline{1368} \\
 10\ 7'2' \\
 \underline{10\ 2\ 6} \\
 46\ 0' \\
 \underline{34\ 2} \\
 \text{Resto } 118\ 00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 342|00 \\
 \hline
 403
 \end{array}$$

39. La divisione in generale riuscirà più compendiosa, trovando i resti senza scrivere i prodotti del divisore per ciascuna cifra del quoziente. Dovendo dividere 5425932 per 7384, si disporrà l'operazione al solito; e preso il primo dividendo 54259 si troverà che la cifra del quoziente è 7. Si dirà: 4 per 7 fa 28, e siccome la cifra delle unità del dividendo è 9, si prenderanno due diecine dalla cifra seguente, il che dà 29; per cui da 28 a 29 è 1, e si nota l'1. Bisogna ricordarsi le 2 diecine prese in prestito, le quali in vece di toglierle dalla cifra seguente 5 si uniranno al prodotto seguente, siccome si è detto (n° 16). Poi si dirà 7 per 8 fa 56 e 2 che si riportano 58, e come la cifra superiore è 5 si aggiungeranno 6 diecine e si farà 65; per cui da 58 a 65 è 7. Si scrive il 7 e si tiene a memoria il 6. In seguito 3 per 7 fa 21 e 6 fanno 27, a 32 è 5. Si nota il 5 e si tiene a memoria il 3. In fine 7 per 7 fa 49 e 3 fanno 52, a 54 è 2. Si scrive il 2, e si avrà il resto 2571. Calata la cifra seguente, si ha il secondo dividendo parziale 25713. Trovato che la cifra del quoziente è 3, si dirà 3 per 4 fa 12, a 13 è 1; 3 per 8 fa 24 e 1 fanno 25, a 31 è 6; 3 per 3 fa 9 e 3 fanno 12, a 17 è 5; 3 per 7 fa 21 e 1 fanno 22, a 25 è 3. Sul terzo dividendo parziale si opererà nel modo stesso.

C A P O II.

DE' DECIMALI.

A R T. I.

Natura e proprietà de' decimali.

40. Secondo la legge sulla quale è fondato il sistema di numerazione, l'unità di cui ogni cifra rappresenta la collezione acquista un valore dieci volte più grande a misura che la cifra avanza di un posto dalla destra verso la sinistra, ed un valore dieci volte più piccolo per ogni posto che retrocede dalla sinistra verso la destra. Segue da ciò che l'unità è la decima parte della diecina, come la diecina lo è del centinajo, il centinajo del migliajo, ec.; e perciò l'unità sarà la centesima parte del centinajo, la millesima del migliajo, ec.

Or nulla impedendo che questa legge di decremento finisca alle unità semplici, si può intenderla prolungata indefinitamente verso la destra, come si trova estesa indefinitamente verso la sinistra. Si stabilirà dunque che una cifra posta a destra delle unità abbia un valore dieci volte più piccolo di quello che avrebbe al posto delle unità; dessa perciò rappresenterà *decimi*. Parimenti una cifra posta a destra de' decimi avrà un valore dieci volte più piccolo di quello che avrebbe al posto de' decimi, cento volte più piccolo di quello che avrebbe al posto delle unità, e rappresenterà *centesimi*; e così proseguendo. Per poter intender il significato di un numero non rimane che a fissare il posto delle unità; per tal oggetto si è convenuto di mettere una virgola dopo le unità. Per es. nel numero 379,4583 la cifra 9 posta a sinistra della virgola rappresenta le unità, e perciò il numero a sinistra della virgola sarà 379 interi; del numero a destra della virgola la prima cifra 4 rappresenta unità dieci volte più piccole dell'unità principale, la seconda rappresenta unità dieci volte più piccole della precedente, e così di seguito. Per queste unità l'ordine di successione è lo stesso come nel numero a destra della virgola; ma il loro valore divenendo di dieci in dieci volte più piccolo, dopo i decimi avranno gli stessi nomi colla desinenza in *esimi*. Perciò la prima cifra a destra della virgola rappresenta decimi, la seconda centesimi, la terza mil-

lesimi, la quarta diecimillesimi, cc. Quel numero adunque rappresenterà 4 decimi, 5 centesimi, 8 millesimi, 3 diecimillesimi. E siccome ne' numeri interi la denominazione la dà l'unità dell' infima specie, per cui il numero 579 non si dice 5 centinaja 7 diecine e 9 unità ma trecento settantanove unità; del pari l'altro si leggerà quattromila cinquecento ottantatre diecimillesimi.

Si può dunque con questo sistema portar l'unità a quel grado di grandezza o di piccolezza che si vuole, col solo scriver le cifre l'una accanto dell'altra, o verso la sinistra o verso la destra.

41. Un numero decimale si leggerà come se fosse un numero intero qualunque, dandogli poi la denominazione che gli compete secondo il numero delle cifre; la quale denominazione sarà determinata dall'unità seguita da tanti zeri per quante sono le cifre dopo la virgola. Perciò nell'esposto esempio essendo 4 le cifre a destra della virgola, il numero esprimerà 10000^{esimi}. Il numero 3,74389 si leggerà: 3 interi e 74389 centomillesimi.

I decimali si scriveranno sotto la dettatura come si scrivono gli altri numeri. Fa d'uopo però porre attenzione alla loro denominazione, affinchè, vedendo quante cifre decimali debbono esservi, si supplisca con gli zeri a quelle che mancano. Così dovendo scrivere 2 interi e 307 milionesimi, siccome un milione ha sei zeri e 307 contiene tre cifre, si aggiungeranno tre zeri a sinistra, e il numero sarà 2,000307. In questo numero mancano i decimi, i centesimi e i millesimi. Similmente il numero 13 interi e 4 diecimillesimi si scriverà 13,0004.

Allorchè mancano le cifre a sinistra della virgola, per far conoscere il posto delle unità, si metterà un zero nel luogo delle unità. Così il numero 0,432 esprime 432 millesimi, e si legge: zero interi e 432 millesimi. Quel zero cui segue la virgola determina il posto relativo di ciascuna cifra; per cui si conosce che il 4 sta nel posto de' decimi, il 3 in quello de' centesimi, e il 2 in quello de' millesimi.

42. È chiaro che in un numero che contiene interi con decimali, aggiungendo degli zeri o a destra o a sinistra, il suo valore non si altera. In effetti se al numero 17,438 si aggiungono degli zeri o a destra o a sinistra, il suo valore rimane invariato, per la ragione che niuna delle cifre cangia di posto.

Operazioni su i decimali.

43. Avendo esteso il sistema di numerazione anche per rappresentare parti minori delle unità, e le regole assegnate per far le operazioni su gl'interi essendo appoggiate al sistema di numerazione, esse converranno ancora al caso in cui i numeri contengono cifre decimali. È necessario nondimeno far alcune osservazioni da tenersi presenti nel caso di cui si tratta.

44. Per l'addizione non altro deesi avvertire, se non che dovendo farsi l'addizione sulle unità della medesima grandezza (n° 12), si sommeranno i decimi co' decimi, i centesimi co' centesimi, ec.; perciò si scriveranno in modo i numeri l'un sotto l'altro, che le unità e la virgola sieno in una stessa colonna verticale.

Ecco degli esempi.

33,57	6,003729
2,58349	1,45
6,0367	3,7273
15,00296	5,8
57,19315	16,981029

45. Per la sottrazione varrà la stessa regola. Solamente se il numero superiore ha meno cifre decimali dell'altro, s'intenderanno messi degli zeri nel posto delle cifre mancanti, come si vede ne' seguenti esempi.

3,743	0,0432	13,58
2,0458	0,028976	2,79873
1,6972	0,014224	10,78127

46. Intorno alla moltiplicazione e alla divisione è necessario esporre alcuni principii.

I. La moltiplicazione per 10, per 100, per 1000, ec. si fa passando la virgola di un posto o di due o di tre, ec. verso la destra, come la divisione per 10, per 100, per 1000, ec. si fa passando la virgola da destra verso sinistra; giacchè in tal

modo le cifre nel primo caso avanzano verso la sinistra e acquistano perciò un valore di dieci in dieci volte più grande, e nel secondo passano verso la destra e acquistano perciò un valore di dieci in dieci volte più piccolo. Così se il numero 43,8932 si voglia moltiplicare per 100, si passerà la virgola di due posti verso la destra, e si avrà 4389,32. Se il numero 3,74 si voglia dividere per 1000, si scriverà 0,00374.

II. Se in una moltiplicazione si aumenta il moltiplicando senza toccare il moltiplicatore viene ad aumentarsi il prodotto, giacchè si ripete lo stesso numero di volte un numero più grande. Perciò il prodotto di 358 per 7 sarà maggiore del prodotto 357 per 7. Se dunque il moltiplicando si raddoppia, si avrà un prodotto doppio; se si triplica, il prodotto sarà triplo; e in generale prendendo un moltiplicando multiplo di un altro, si avrà un prodotto egualmente multiplo del primo. Si verifica dunque sul moltiplicando la stessa proprietà che nel n° 26 si è dimostrata sul moltiplicatore, cioè che prendendo un moltiplicatore doppio, triplo ec. si ha anche un prodotto doppio, triplo, ec. Il che dipende dall'altro principio, che siccome il prodotto è sempre lo stesso, qualunque de' fattori si prenda per moltiplicando (n° 23), la stessa proprietà di cui gode un fattore deve goder l'altro.

III. Essendo la divisione un'operazione inversa della moltiplicazione, ne segue, che se si divide o il moltiplicando o il moltiplicatore per 2, per 3, ec., anche il prodotto sarà diviso per 2, per 3, ec.

IV. Quindi se si moltiplica per un numero qualunque il moltiplicando e per lo stesso numero si divide il moltiplicatore, o viceversa, il prodotto non varia.

V. Siccome nella divisione, il dividendo corrisponde al prodotto e il divisore al moltiplicatore, perciò se il dividendo e il divisore si moltiplicano o si dividano contemporaneamente per un medesimo numero, il quoziente non varia. Questa proprietà era stata dimostrata in particolare pe' numeri 10, 100, ec. nel n° 36.

Premesse queste proposizioni, passiamo ad esporre il metodo da seguirsi nella moltiplicazione e divisione de' decimali.

47. Sia per es. da moltiplicarsi 2358,43 per 4,732. Se si sopprime la virgola tanto nel moltiplicando che nel moltiplicatore, si viene a moltiplicare il primo numero per 100, il secondo per 1000. E siccome moltiplicando 235843 per

4732 si ottiene un prodotto 100000 volte maggiore, dividendo questo prodotto per 100000, ossia separandone cinque cifre decimali, si avrà il prodotto richiesto. Segue da ciò la regola, che la moltiplicazione de' decimali si fa come se i numeri fossero interi, e poi dal prodotto si staccano tante cifre decimali, quante ve ne ha ne' due fattori.

Si può ancora considerar questa moltiplicazione sotto un altro aspetto. Siccome il prodotto rappresenta unità dello stess' ordine del moltiplicando, si potrà sopprimere la virgola nel moltiplicatore, e accrescere tante cifre decimali nel moltiplicando, trasportando la virgola verso la sinistra, per quante ne sono state sopprese nel moltiplicatore; il che facendo, il prodotto non varia (n° 46, IV.). Allora i due numeri proposti diverranno quelli che sono in margine. La virgola nel prodotto occuperà lo stesso posto che ha nel moltiplicando. Volendo parimenti il prodotto di 0,04752 per 13,27, si moltiplicherà 0,0004752 per 1327.

È utile in alcuni casi, specialmente quando vi son decimali, cominciare i prodotti parziali dalla sinistra verso la destra; nel prodotto non vi sarà differenza, solamente la linea che era l'ultima si troverà scritta la prima, la penultima sarà la seconda, ec., come si osserva in margine. Questa maniera di operare ha il vantaggio di dar prima le cifre delle unità dell'ordine il più elevato, che molte volte sono le sole che interessa conoscere.

$$\begin{array}{r}
 2,35843 \\
 \underline{4732} \\
 4,71686 \\
 70,7529 \\
 1650,901 \\
 \underline{9433,72} \\
 11160,09076
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,35843 \\
 \underline{4732} \\
 9433,72 \\
 1650,901 \\
 70,7529 \\
 \underline{4,71686} \\
 11160,09076
 \end{array}$$

48. Riguardo alla divisione, se il divisore non ha cifre decimali, si farà la divisione al modo ordinario. Solo è da avvertire che siccome le cifre del quoziente son dello stesso ordine delle cifre che si calano nel dividendo, appena si cala la prima cifra decimale, si metterà la virgola nel quoziente. Nell'esempio qui annesso, dopo la seconda divisione si ha il resto 33, e bisogna calare la cifra 8 che è la prima decimale. Il dividendo parziale 338 rappresentando decimi, si metterà la virgola nel quoziente, affinchè la cifra 6 esprima decimi. Le cifre seguenti si troveranno

$$\begin{array}{r}
 3119,82 \quad \left| \begin{array}{l} 54 \\ 59,62 \end{array} \right. \\
 519 \\
 \underline{338} \\
 142 \\
 \underline{34}
 \end{array}$$

situate tutte al posto che ad esse compete, secondo l'ordine delle unità che debbono rappresentare.

49. Se poi anche il divisore contiene decimali, siccome il quoziente non si altera se il dividendo e il divisore si moltiplicano per un medesimo numero (n°44, V.), si sopprimerà la virgola nel divisore, e nel dividendo si trasporterà di tanti posti verso la destra per quante erano le cifre decimali del divisore. Sia per es. da dividersi 3584,2794 per 2,71; questa divisione, facendo quanto si è detto, si ridurrà a quella di 358427,94 per 271. Perciò se le cifre decimali nel dividendo e nel divisore sono eguali, si sopprimerà la virgola in ciascuno; se quelle del divisore sono in maggior numero, si aggiungeranno nel dividendo gli zeri necessari per eguagliar le cifre a destra della virgola, e poi si sopprimerà la virgola; se quelle del dividendo sono in maggior numero, ne rimarrà nel dividendo un numero eguale alla differenza fra le cifre decimali del dividendo e quelle del divisore. Così la divisione di 538,27 per 0,47 si riduce a quella di 53827 per 47; la divisione di 12,4 per 1,2589 si riduce a quella di 124000 per 12589.

50. Poichè a destra di un numero che contiene cifre decimali si possono aggiunger quanti zeri si vogliono senza che il valore del numero si alteri (n°42), si può la divisione prolungar quanto si vuole, e in molti casi si può pervenire a una divisione senza resto. Dovendo per es. dividere 5743,27 per 1,61 si disporrà l'operazione secondo è stato prescritto. Pervenuti all'ultimo resto 7, si aggiungerà un zero; e continuando la divisione, si otterrà il quoziente esatto 358,954375. Così operando, è come se si dividesse per 16 il numero 5743,270000 che non differisce dal dato.

$$\begin{array}{r}
 5743,27 \\
 94 \\
 143 \\
 152 \\
 87 \\
 70 \\
 60 \\
 120 \\
 80 \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 | 16 \\
 \hline
 358,954375
 \end{array}$$

51. Non sempre si può ottenere un quoziente esatto, prolungando la divisione; il quoziente però diverrà tanto più approssimato, quanto più si prolungherà l'operazione, e l'errore che si commette sarà minore di un'unità dell'ordine

a cui si è interrotta l'operazione. Se nell'es. precedente si fosse finita la divisione dopo la terza decimale, si sarebbe avuto il quoziente approssimato 358,954, e l'errore proveniente dalle cifre trascurate sarebbe evidentemente minore di 0,001.

Sin ancora l'altro esempio posto a lato. Si faccia la divisione, e si ottenga il quoziente fino alla quarta cifra decimale. Or è chiaro che qualunque possa esser il numero delle cifre che verrebbero nel quoziente continuando la divisione, prese insieme non possono formare un diecimillesimo; altrimenti il quoziente sarebbe 63,7414. Dunque l'errore è minore di 0,0001.

$$\begin{array}{r} 2358,43 \quad | \quad 37 \\ 138 \quad | \quad 63,7413 \\ 274 \quad | \\ 153 \quad | \\ 50 \quad | \\ 130 \quad | \\ 19 \quad | \end{array}$$

52. Con questo metodo si può ottenere un quoziente approssimato anche quando il dividendo non contiene decimali; giacchè mettendo una virgola dopo il dividendo si possono aggiunger quanti zeri si vorrà. In fatti il numero 583 è lo stesso che 583,000... Per conseguenza 583 diviso per 25 dà per quoziente esatto 23,32.

$$\begin{array}{r} 583 \quad | \quad 25 \\ 83 \quad | \quad 23,32 \\ 80 \quad | \\ 50 \quad | \\ 0 \quad | \end{array}$$

53. Se il primo dividendo parziale preso a sinistra della virgola nel dividendo non contenesse il divisore, si scriverà zero nel quoziente e si metterà la virgola. Nell'annesso esempio si vede che 4 non contiene il divisore; si scriverà 0 nel quoziente, e si passerà al secondo dividendo parziale 45; dopo di che si continuerà l'operazione.

$$\begin{array}{r} 4,523 \quad | \quad 8 \\ 52 \quad | \quad 0,565.. \\ 43 \quad | \end{array}$$

In quest'altro esempio, il primo dividendo parziale 3 dà 0 nel quoziente; messa la virgola si passerà al secondo dividendo 35 che dà anche 0; il terzo 354 dà anche 0; il quarto 3543 dà 4, e poi si prosegue l'operazione al solito. Si vede in effetti che il primo dividendo parziale 3543 che contiene il divisore 783 rappresenta millesimi, e perciò la prima cifra del quoziente dev'esser anche millesimi.

$$\begin{array}{r} 5,5432 \quad | \quad 783 \\ 783 \quad | \quad 0,004 \end{array}$$

C A P O III.

DELLE FRAZIONI.

54. Bisogna rammentarsi che l'unità è il termine a cui si paragonano le diverse quantità che si vogliono rappresentare, e che il numero è il risultamento del confronto fatto della quantità colla sua unità (n° 2 e 3). Se il numero si forma esattamente dall'unità ripetuta un certo numero di volte, sarà *intero*; sarà *frazione*, se esprime una parte dell'unità; e *frazionario*, se è composto di un certo numero di unità intere più una frazione (n° 4).

Prima di esporre le proprietà delle frazioni in generale e le regole per eseguire su di esse le quattro operazioni, daremo la spiegazione di alcuni segni, de' quali per brevità di discorso faremo in seguito frequente uso.

Spiegazione de' segni.

Il segno $+$ indica l'addizione e si pronuncia *più*. Così $3+5$ si legge 3 più 5, ed equivale a 8.

Il segno $-$ interposto tra due numeri serve per indicar la sottrazione, e si pronuncia *meno*: $7-2$ si pronuncia 7 meno 2, ed è lo stesso che 5.

Il segno $\times$ indica moltiplicazione; quindi l'espressione 3×5 si pronuncia 3 moltiplicato per 5, ed equivale a 15. Questo prodotto s'indica ancora così: 3.5 .

Il segno $:$ indica divisione: $13:5$ si pronuncia 13 diviso per 5.

Il segno $=$ rappresenta l'eguaglianza di due quantità, e si pronuncia *eguale*.

Il segno $>$ posto fra due quantità indica che la prima è maggiore della seconda; perciò $7>5$ si pronuncia 7 maggiore di 5.

Il segno $<$ esprime che la quantità a sinistra è minore dell'altra. Così $2<5$ si legge 2 minore di 5.

Natura e proprietà delle frazioni.

55. Quando una quantità non può esser rappresentata esattamente per mezzo della unità ripetuta, bisogna scegliere un'altra unità più piccola che goda di questa proprietà; Abbiamo già verificato ciò ne' decimali. Per esempio il numero 3,27 indica una quantità che non si è potuto esprimere ripetendo l'unità stabilita un esatto numero di volte, sicchè si è presa prima un'unità dieci volte più piccola, e col 2 si è rappresentata un'altra parte di detto numero; ciò non bastando, si è presa un'altra unità dieci volte più piccola della seconda, e si sono scritte 7 di quest'ultima unità. E siccome quel numero si può leggere 327 centesimi, si vede che si è dovuto scegliere un'unità cento volte più piccola, affinchè prendendo 327 di queste unità venisse esattamente rappresentata la quantità proposta.

La grandezza dell'unità o la sua denominazione dipendendo ne' decimali dal posto delle cifre, non vi è bisogno per rappresentar queste frazioni che di un solo numero. Ma quando le suddivisioni dell'unità non hanno relazione col sistema di numerazione, per rappresentare le frazioni vi bisogna due numeri, uno che faccia conoscere in che modo l'unità scelta dipende dall'unità principale, l'altro il numero di queste unità. Il primo si chiama *denominatore* il secondo *numeratore*. Si è convenuto di scrivere il numeratore e il denominatore l'uno sotto l'altro, separati da una linea. Così la quantità $\frac{1}{5}$ rappresenta una parte dell'unità o una frazione; il numero 5 esprime che l'unità cui si riferisce è la quinta parte dell'unità principale, e l'altro che si prendono 3 di queste unità; o in altri termini, i due numeri co' quali si rappresenta la frazione suddetta esprimono che l'unità è divisa in cinque parti e di queste se ne son prese 3. Parimenti la frazione $\frac{3}{7}$ fa conoscere che si ottiene questa quantità dividendo l'unità in 7 parti, e prendendo 3 di queste parti. Il numeratore e il denominatore si dicono i *termini* della frazione.

56. Per poter aver idea della grandezza di una cosa bisogna misurarla. L'unità è la misura della quantità espressa da un numero intero; una parte più piccola dell'unità serve a misurare le frazioni. Considerando la frazione $\frac{1}{2}$, si ve-

drà che $\frac{1}{5}$ serve di misura comune all'unità e a questa quantità, giacchè è contenuto nove volte nell'unità, quattro volte nella quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$. Per ciò i numeri interi e le frazioni si chiamano quantità *commensurabili*.

57. Se si moltiplica una frazione pel suo denominatore si ha per prodotto il suo numeratore. In effetti la frazione $\frac{4}{5}$ esprimendo che si ripete quattro volte $\frac{1}{5}$ dell'unità, se ogni quinta parte si ripete cinque volte, si avrà l'unità; e in conseguenza la quantità $\frac{4}{5}$ ripetuta cinque volte deve dar 4 unità. Ossia $\frac{4}{5} \times 5 = 4$.

Da ciò risulta che una frazione è il quoziente della divisione del numeratore pel denominatore. Questo quoziente non rappresentando il suo valore che per mezzo degli elementi che lo producono, cioè del dividendo e del divisore, dovrà una frazione riguardarsi come l'indicazione di una divisione che o non si è voluto o non si è potuto effettuare.

Che questa sia l'origine delle frazioni si vedrà meglio dall' annesso esempio. Dopo aver diviso 431 per 8, si avrà per quoziente 53, per residuo 7. Volendo dunque dividere 431 in 8 parti eguali intere è impossibile; nè si può fare altrimenti la divisione esatta che aggiungendo al quoziente una frazione dell'unità. Or se il resto fosse stato 1, è chiaro che dividendo l'unità in otto parti, e assegnando una di queste parti al quoziente 53, si sarebbe ottenuto un quoziente esatto. Facendo lo stesso con ciascuna delle 7 unità del residuo, si vede che la parte da aggiungersi al quoziente si ottiene dividendo l'unità in 8 parti e poi prendendone 7; il che dà la frazione $\frac{7}{8}$. Questa frazione esprime che si dovrebbe divider 7 per 8.

$$\begin{array}{r} 431 \mid 8 \\ 31 \mid 53 \\ 7 \end{array}$$

58. Una frazione che ha il numeratore eguale al denominatore rappresentata l'unità. Quindi $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1$.

Se poi il numeratore è maggiore del denominatore, l'espressione rappresenta una quantità maggiore dell'unità, e chiamasi numero *frazionario*. Tale è per es. $\frac{11}{9}$.

59. Si possono da' numeri frazionari ricavar gl' interi, dividendo il numeratore pel suo denominatore. Perciò $\frac{44}{9} = 4\frac{8}{9}$.

Viceversa, un intero unito ad una frazione si riduce ad un sol numero frazionario che avrà per numeratore il pro-

dotto dell' intero pel denominatore della frazione più il numeratore della frazione, e per denominatore quello stesso della frazione. E ciò perchè il quoziente moltiplicato pel divisore più il resto debbono riprodurre il dividendo (n° 29). Per ciò $13\frac{2}{3} = \frac{41}{3}$.

60. Ogni numero intero può esser rappresentato da una frazione di una specie data, moltiplicando l' intero per un dato numero e dividendo per lo stesso numero. Perciò 3 si converte in $\frac{3}{1}$, in $\frac{6}{2}$, ec.

61. Riguardando una frazione come una divisione indicata, pe' principii stabiliti nel n° 46 si ricava, che moltiplicando o dividendo il numeratore si moltiplica o si divide la frazione. Ma stando anche all' idea che va annessa al numeratore e al denominatore si vede, che se il denominatore rimane lo stesso e si raddoppia il numeratore, si viene a prendere un doppio numero di parti della medesima grandezza; se si triplica, il numero delle parti è triplo; e in generale moltiplicando il numeratore senza toccare il denominatore, si moltiplica la frazione. Se poi senza toccare il numeratore si raddoppia il denominatore, si troverà l' unità divisa in un doppio numero di parti, e quindi ogni parte diventerà la metà di quel che era prima; si prenderà perciò lo stesso numero di parti più piccole di una metà; e quindi la frazione si troverà divisa per 2. Parimenti si dimostra, che moltiplicando per 3 il denominatore si prenderà la terza parte della frazione; e in generale moltiplicando il denominatore si divide la frazione.

La divisione producendo un effetto contrario a quello che produce la moltiplicazione, ne segue che se si divide il numeratore di una frazione senza toccare il denominatore, si divide la frazione; e se si divide il denominatore senza toccare il numeratore, si moltiplica la frazione.

Da ciò risulta, che la moltiplicazione o la divisione, operate nel numeratore producono l' effetto stesso che sugl' interi, e operate nel denominatore producono un effetto contrario al senso assegnato a queste operazioni.

62. Dunque se in una frazione si moltiplicano o si dividono i suoi termini per un medesimo numero, il suo valore non cangia.

Perciò le frazioni

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{5}{10}, \text{ ec.}$$

o le altre

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{10}{30}, \quad \frac{42}{126}, \quad \frac{51}{153}, \text{ ec.}$$

sono tutte uguali.

63. Si vede da ciò che una quantità commensurabile che non può esser espressa da un numero intero, può esserlo da una infinità di frazioni. Fra queste ve n'è una che è la più semplice di tutte. Negli esempi citati le più semplici son certamente le prime. Or se si prende per es. la frazione $\frac{42}{126}$, questa si riduce a $\frac{1}{3}$ dividendo i suoi termini per 42. Perciò si ridurrà una frazione ad una espressione più semplice dividendo il numeratore e il denominatore per qualche loro fattore comune. Se si ha per es. la frazione $\frac{546}{714}$, per vedere se può ridursi a più semplice espressione si sperimenterà la divisione dei suoi termini per 2, 3, 5, ec. Infatti dividendo per 2 il numeratore e il denominatore, quella frazione si riduce a $\frac{273}{357}$ che è più semplice della proposta. Si tenta la divisione per 3, la quale riesce esattamente; e la frazione si riduce all'espressione $\frac{91}{119}$. Passando allo sperimento degli altri numeri consecutivi, si trova che il primo che divida esattamente i termini 91 e 119 è 7. Effettuata la divisione, si ha finalmente la frazione molto semplice $\frac{13}{17}$.

Quanto più semplice è la frazione, ossia quanto più piccoli sono i termini da cui è rappresentata, tanto più distinta è l'idea che può formarsi del suo valore. È di fatto più difficile concepir il valore di un'unità divisa in 714 parti di cui se ne prendano 546, che di un'unità divisa in 17 parti di cui se ne prendano 13. La riduzione delle frazioni alla più semplice espressione è interessantissima, ma però non può cadere che sulle frazioni, i termini delle quali hanno de' fattori comuni. Passeremo quindi ad esporre alcune teoriche sulla divisibilità de' numeri, dalle quali dipende quella delle frazioni.

Sulla divisibilità de' numeri.

64. Un numero si dice divisibile per un altro, quando la divisione del primo pel secondo si fa senza resto.

Un numero si dice *primo* quando non ha altro divisore che sè stesso e l'unità. Così 2, 3, 5, 7, 11, 13, ec. sono numeri primi. Due numeri si dicono *primi tra loro*, quando non hanno alcun divisore comune.

Poste queste definizioni, ecco alcuni teoremi sulla divisibilità de' numeri.

65. I. Se un numero è divisibile per un altro, lo saranno ancora i suoi multipli. Per es. 24 è divisibile per 3; anche 24×5 sarà divisibile per 3. In effetti il numero che risulta del prodotto 24×5 è composto delle parti $24 + 24 + 24 + 24 + 24$, ciascuna delle quali è divisibile per 3; perciò tutto il numero lo sarà pure (n° 33).

Da ciò segue: 1° che un numero che ha due o più divisori, sarà divisibile pel loro prodotto, e viceversa; 2° che se un numero ha più fattori, diviso per uno di essi, il quoziente conterrà tutti gli altri; 3° che se nel dividendo si trovano tutti i fattori del divisore la divisione si fa senza resto (*).

66. II. Se un dato numero è composto di più parti, dividendo per un dato divisore ciascuna parte e poi la somma de' resti di queste divisioni, si avrà un resto eguale a quello che dà la divisione dell' intero numero. Per es. sia $66 = 37 + 25 + 4$; dividendo ciascuna di queste parti per 8 si hanno i resti 5, 1, 4 (**), la cui somma 10 divisa per 8 dà per resto 2; e questo è il resto di 66 diviso per 8. Imperocchè 66 essendo composto di $37 + 25 + 4$ si potrà considerare come composto di $32 + 5 + 24 + 1 + 4$, dalla quale somma tolte le parti 32 e 24 che son multipli di 8, si viene a togliere una parte degli 8 contenuti in 66; sicchè togliendo l' 8 quante volte si può dalla somma rimanente $5 + 1 + 4$, si ha il resto della divisione di 66 per 8.

(*) Si dimostra in Algebra che solo in questo caso la divisione esatta è possibile.

(**) 4 diviso per 8 dà per quoziente 0 e per resto 4.

Da ciò si ricavano le conseguenze seguenti.

1° Se ciascuna parte di un numero separatamente è divisibile per un dato divisore, lo sarà pure il numero. Per es. se si fa $40 = 25 + 15$, siccome ciascuna parte è divisibile per 5, anche 40 sarà divisibile per 5.

2° Se un numero è divisibile per un altro, dev' esserlo pure la somma de' resti delle sue parti; e viceversa.

3° Se un numero che ha un divisore è decomposto in due parti, una delle quali sia divisibile per questo divisore, anche l'altra dev' esserlo.

67. III. Se si divide un prodotto e i due fattori per un dato divisore e poi si fa il prodotto de' resti de' fattori e si divide nuovamente per lo stesso divisore, il resto di quest' ultima divisione sarà eguale al resto dato dal prodotto. In effetti si sia fatta la moltiplicazione di 254 per 27. Si divida l'uno e l'altro numero per 7, e si notino i resti. Il resto di 254 diviso per 7 è 2, quello di 27 diviso per 7 è 6. Possiamo dunque de' numeri 254 e 27 formarne due parti, una che sia un multiplo di 7, e l'altra sia il resto. Il primo numero si dividerà nelle due parti $252 + 2$; ora il prodotto di 254 per 27 è lo stesso che quello di $252 + 2$ per 27, cioè quello di 252 per 27 più quello di 2 per 27; ma la prima parte è un multiplo di 7, dunque il resto che dà il prodotto diviso per 7 è uguale a quello che dà 2×27 . Quest' ultimo prodotto è uguale a quello di 2×21 più 2×6 ; ed essendo la prima parte divisibile per 7, il resto della divisione per 7 del prodotto de' numeri dati sarà uguale al resto della divisione per 7 del prodotto 2×6 de' resti de' fattori. Questo resto è 5; e in effetti il prodotto $254 \times 27 = 6858$, diviso per 7, dà per resto 5.

68. Si decomponga un numero qualunque, per es. 374, in decine e unità, si avrà $374 = 370 + 4$. Ora 370 è divisibile per 10 (n° 31), e $10 = 2 \times 5$, dunque sarà divisibile per 2 e per 5 (n° 65, 1°). Quindi se la seconda parte è divisibile per 2 o per 5, anche il numero proposto lo sarà (n° 66, 1°). La divisibilità di un numero per 2 o per 5 non dipende dunque che dalla sua ultima cifra.

Or osservando nella tavola di Pitagora (n° 22) i multipli di 2 o di 5 composti di una sola cifra, si ricaverà: 1° che un numero si potrà dividere per 2 se è terminato da una

delle cifre 0, 2, 4, 6, 8; 2° sarà divisibile per 5 se l'ultima cifra è zero o 5.

Parimenti, decomponendo un numero in centinaia e unità, si ricava che per esser divisibile per 4 lo debbono esser le sue due ultime cifre. Decomponendolo in migliaia e unità si deduce, che sarà divisibile per 8 se le tre ultime cifre lo sono.

I numeri che possono esser divisi esattamente in due parti eguali, ossia che sono divisibili per 2 si dicono *pari*, gli altri si chiamano numeri *impari*.

69. I numeri 10, 100, 1000, ec. si possono decomporre in $9+1$, $99+1$, $999+1$, ec. Or la prima parte è esattamente divisibile per 9, perchè lo è ciascuna cifra in particolare (n° 33), e la seconda parte è minore di 9, dunque il resto della divisione di questi numeri per 9 è sempre 1. Ciò posto, essendo 300 eguale a $100+100+100$, ciascuna di queste parti divisa per 1 dà per resto 1; dunque (n° 66) 300 diviso per 9 dà per resto 3. Per la stessa ragione 5000 diviso per 9 dà per resto 5, 70 diviso per 9 dà per resto 7.

Sia ora il numero 3747; questo è uguale a $3000+700+40+7$. Il resto della divisione per 9 del numero dato è uguale alla somma de' resti delle parti di cui è composto, che sono le stesse cifre significative. Dunque il resto della divisione per 9 di un numero qualunque è uguale a quello che si ottiene dividendo per 9 la somma delle sue cifre. Quindi 3747 diviso per 9 dà lo stesso resto che 21 diviso per 9: questo resto è 3. Dunque un numero è divisibile per 9 se lo sarà la somma delle sue cifre. I numeri 3573, 207, 459 son divisibili esattamente per 9.

Si riconosce facilmente che la stessa proprietà appartiene al numero 3. Dunque se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3, lo sarà anche il numero.

70. È facile trovare i resti de' numeri

1, 10, 100, 1000, 10000, ec.

divisi per un numero qualunque. Supponiamo che questi numeri si vogliano dividere per 7. Siccome 1 è minore di 7, il resto di 1 diviso per 7 è 1. Poi 10 diviso per 7 dà per resto 3; 100 che è uguale a 10×10 darà lo stesso resto che 3×3 diviso per 7, ossia 2 (n° 67). Parimenti $1000 = 100 \times 10$ diviso per 7 darà per resto 2×3 , ossia 6; 10000 diviso per 7 darà per resto 3×6 diviso per 7, ossia 4; 100000 diviso per 7 dà per resto 5; 1000000 diviso per 7 dà per resto 1; e così di seguito. Arrivati al primo resto 1, debbono necessariamente ritornare

i medesimi resti collo stess' ordine, giacchè essi si ottengono sempre colle medesime operazioni. I resti adunque della divisione per 7 de' numeri 1, 10, 100, 1000, ec. sono 1, 3, 2, 6, 4, 5, e questi ritornando sempre col medesimo ordine formano un *periodo*. Essendo il resto minore del divisore, il numero de' termini che formano il periodo può esser al più quanto il divisore meno uno, ma può esser anche minore (*).

Or se il resto di 100 diviso per 7 è 2, quello di 500 diviso per 7 è uguale a quello di 5×2 diviso per 7 cioè 2, giacchè 500 è uguale a 5×100 . Parimenti, essendo 6 il resto di 1000 diviso 7, quello di 3000

diviso per 7 sarà $\frac{3 \times 6}{7}$, ovvero 4; ec. Conoscendo adunque il resto delle divisioni di 1, 10, 100, 1000, ec. per 7, si conoscerà anche quello di un numero qualunque diviso per 7 con moltiplicare le unità, decine, centinaia, ec. pe' resti rispettivi di 1, 10, 100, ec., farne la somma, e dividere questa somma per 7. Prendiamo ad esempio il numero 783582496. Si disporrà l'operazione come qui appresso.

$$\begin{array}{r}
 783583296 \\
 231546231 \\
 \hline
 6 \\
 27 \\
 6 \\
 12 \\
 32 \\
 25 \\
 3 \\
 24 \\
 14 \\
 \hline
 149 \\
 231 \\
 \hline
 9 \\
 12 \\
 2 \\
 \hline
 23 \\
 \text{Resto } 2
 \end{array}$$

Si scriveranno dalla destra verso la sinistra sotto le cifre del numero i resti secondo l'ordine ottenuto. Poi si farà il prodotto delle cifre corrispondenti alla stessa colonna verticale. La somma di tutti questi prodotti è 149. Si opererà su questo numero come sul primo, e così si continuerà finchè si arrivi a un numero che non ha più di due cifre, il cui resto si scopre a colpo d'occhio.

(*) Si dimostrerà in Algebra che quando il divisore è numero primo, il numero de' termini che formano il periodo, o è il divisore meno uno, o un sottomultiplo del divisore meno uno; e che il periodo comincia al primo termine o no, secondo che il divisore è primo o non è primo con 10.

Nella serie de' resti 1, 3, 2, 6, 4, 5, per quelli che superano la metà di 7 si possono prendere i loro complementi a 7, e cambiare la somma in sottrazione; la somma richiesta si troverà così diminuita di un certo multiplo di 7 ($n^o 20$), il che è vantaggioso. Sostituendo ai tre ultimi resti i loro complementi a 7 che sono 1, 3, 2, l'esempio precedente si modificherà come segue.

$$\begin{array}{r}
 783582396 \\
 231231231 \\
 \hline
 2 \quad 6 \\
 24 \quad 27 \\
 10 \quad 6 \\
 \hline
 36 \quad 3 \\
 \quad 24 \\
 \quad 14 \\
 \quad \hline
 \quad 80 \\
 \quad 36 \\
 \quad \hline
 \quad 44 \\
 \text{Resto } 2
 \end{array}$$

I resti da sottrarsi sono segnati con linea al di sotto. Fatta la somma de' prodotti de' resti veri, e quella de' complementi a 7, dalla prima somma si sottrae la seconda, e si ha 44 che diviso per 7 dà per resto 2, come sopra si era trovato. Il numero 44 differisce da 149 ottenuto nel caso precedente per $105 = 15 \times 7$, cioè di tanti 7 per quante unità si contengono nelle cifre 5, 8, 2 che si sono moltiplicate pe' complementi.

71. I numeri 1, 10, 100, 1000, ec. divisi per 4 danno per resto 1, 2, 0, 0, ...; dunque si ha il resto della divisione di un numero per 4, dividendolo per 4 la somma della prima cifra a destra e della seconda moltiplicata per 2; e se questa somma divisa per 4 non dà resto, il numero sarà divisibile per 4. I numeri 532, 1744 son divisibili per 4.

I resti degli stessi numeri 1, 10, 100, 1000, ec. divisi per 8, sono 1, 2, 4, 0, 0, ...; dunque sommando la prima cifra a destra, la seconda moltiplicata per 2, la terza moltiplicata per 4, e dividendolo questa somma per 8, si ha lo stesso resto che dà il numero diviso per 8.

Se dunque quest'ultima divisione si fa senza resto, il numero sarà divisibile per 8. Perciò 7232 è divisibile per 8.

72. I resti della divisione per 11 de' numeri 1, 10, 100, ec. sono 1, 10, 1, 10, ec. Dunque si ottiene il resto della divisione per 11 prendendo quello delle cifre a due a due. Dato per esempio il numero 357848, il resto della divisione per 11 sarà uguale alla somma de' resti di 48, 78, 35 divisi rispettivamente per 11. Or moltiplicando i primi 9 numeri per 11 si ha 11, 22, 33, 44, ec. cioè un numero composto di due cifre eguali, perciò il resto della divisione per 11 di

un numero di due cifre è uguale alla differenza fra le unità e le decime, o fra le unità aumentate di 11 e le decime, nel caso che la prima cifra a destra sia minore della seconda. I resti adunque di 48, 78, 85 divisi per 11 sono 4, 1, 8. Sommati danno 13; ma il resto della divisione di 13 per 11 è 2, perciò 357848 diviso per 11 dà per resto 2. In vece di sottrarre la prima cifra a destra dalla seconda, poi la 3^a dalla 4^a, poi la 5^a dalla 6^a, ec., sarà più facile sommare le cifre di posto impari, cioè la 1^a, la 3^a, la 5^a ec., e sottrarne la somma della 2^a, 4^a, 6^a, ec. Se la seconda somma è maggiore della prima, si aggiungerà 11 al primo numero, e si farà la sottrazione.

Questa proprietà del numero 11 si rende anche più evidente, se in vece del resto 10 s'impiega il suo complemento a 11, che è 1. Cambiandosi allora la somma in sottrazione, ne risulta subito la regola assegnata.

Dunque se in un numero la somma delle cifre di posto impari è uguale a quella delle cifre di posto pari, o la loro differenza è un multiplo di 11, il numero sarà divisibile per 11.

73. Se due numeri hanno un divisore comune, questo divisore sarà anche comune al resto della divisione di uno per l'altro. Sieno per es. i due numeri 429 e 54 che hanno per divisore comune 3. Se si divide 429 per 54, si ha per resto 51 che è anche divisibile per 3. In effetti $429 = 54 \times 7 + 51$. Or delle due parti che compongono il numero 429 la prima è divisibile per 3, dovrà dunque esserlo anche la seconda (n° 66, 3°).

Se si divide un numero per un altro, e poi il nuovo divisore pel nuovo resto, e così continuando, col passar sempre il divisore precedente per dividendo e il resto per divisore, si arrivi a una divisione senza resto, l'ultimo divisore sarà un divisore comune ai due numeri dati. Sieno per es. i due numeri 377 e 156. Dividendo 377 per 156 si ha per resto 65; dividendo 156 per 65 si ha per resto 26; dividendo 65 per 26 si ha per resto 13; dividendo 26 per 13 non si ha resto; sarà 13 un divisore comune di 377 e 156. Di fatto 13 dividendo sè stesso e 26, dividerà anche 65 che è uguale $26 \times 2 + 13$ (n° 66, 1°). Dividendo 65 e 26, dividerà anche 156 che è uguale $65 \times 2 + 26$. Per la stessa ragione dividendo 156 e 65, dividerà pure $377 = 156 \times 2 + 65$. Dunque 13 divide i due numeri dati 156 e 377. E inoltre il più grande de' divisori comuni, perchè 13 non può esser diviso da un numero più grande di sè stesso. Per queste proprietà il numero 13 si chiama il *massimo comun divisore* de' due numeri 377 e 156.

Per trovare il massimo comun divisore fra due numeri dati si terrà la seguente regola. *Si dividerà il più grande pel*

più piccolo ; poi si passerà il resto per divisore e il divisore per dividendo ; il resto di questa seconda divisione passerà per divisore e l'ultimo divisore per dividendo ; e così si continuerà finchè si pervenga ad una divisione senza resto. L'ultimo divisore sarà il m. c. divisore richiesto.

L'operazione potrà disporsi come si vede scritto quì appresso pe' due numeri 377 e 156.

$$377 \left| \begin{array}{c} 156 \\ 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 65 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{c} 26 \\ 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 13 \\ 2 \end{array}$$

Se questo divisore che non dà resto fosse l'unità, i due numeri non avrebbero per divisore comune che l'unità; sarebbero perciò numeri primi tra loro (n° 64).

È chiaro inoltre che questo metodo conduce sempre all'intento, giacchè i resti andando sempre diminuendo, si deve finalmente arrivare a un resto, o eguale a 1, o che divide il precedente.

74. Nella ricerca del m. c. divisore fra due numeri giova, per abbreviare il calcolo, aver presenti le seguenti osservazioni.

1° Se nel corso dell'operazione si arriva ad un resto che si conosce esser numero primo, è inutile continuare il calcolo. Così pe' due numeri 357 e 91 arrivati al resto 17, è inutile andar più innanzi, perchè 17 essendo numero primo 357 $\left| \begin{array}{c} 91 \\ 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} 74 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 17 \\ \end{array} \right|$ e non dividendo 74, i numeri proposti sono primi tra loro.

2° Se uno de' due numeri ha un divisore che l'altro non ha, si potrà dividere il primo numero per questo divisore, e impiegare il quoziente in vece del numero dato. In effetti nell'esempio di sopra, 156 è divisibile per 3 e per 4 ossia per 12, mentre 377 non lo è; dunque 12 non può far parte del m. c. divisore. Diviso 156 per 12 si ha per quoziente 13, per cui si opererà sopra i numeri 377 e 13; e siccome la prima divisione riesce esatta, si trova subito che il m. c. divisore è 13.

3° Prima d'incominciar l'operazione indicata sarà utile il togliere tutt'i fattori comuni che si scoprono alla semplice ispezione de' numeri o colle regole de' n° 68 e seguenti. Ciò ha per oggetto di render più breve il calcolo operando sopra numeri più piccoli. Il m. c. divisore sarà allora il prodotto del divisore trovato colla regola del n° prec. pei fattori che sono stati tolti da principio. Sieno per es. i due numeri 315 e 4368 de' quali si cerca il m. c. divisore. Osservando che il primo ha per fattore 5 che non divide il secondo, e il secondo ha per fattore 4 che non è comune al primo, si potrà dividere il primo per 5 il secondo per 4, e si avranno i numeri 63 e 1092, su i quali si dovrà

operare. Essi avendo il fattore comune 3 si potranno ridurre, colla soppressione del detto fattore, a 21 e 364. Questi due numeri hanno per fattore il primo 3 e il secondo 4. Divisi dunque uno per 3 l'altro per 4, divengono 7 e 91. Si è ridotta così la quistione ad operare sopra i due numeri 7 e 91; e siccome la divisione si fa esattamente, sarà 7 il m. c. div. di 7 e 91; e quindi 7×3 ossia 21 sarà il m. c. d. de' numeri dati 315 e 4368.

75. Una frazione si riduce alla sua più semplice espressione dividendo i suoi termini pel m. c. divisore. Perciò dividendo i termini della frazione $\frac{156}{377}$ pel m. c. divis. 13 (n° 73), si ha la frazione ridotta alla sua più semplice espressione, cioè $\frac{12}{29}$.

Una frazione, i cui termini sono primi tra loro, non potendosi ridurre ad espressione più semplice, si chiama *irriducibile*.

76. In vece di dividere i termini 156 e 377 per 13, si può pervenire a' quozienti, trovando successivamente tutti i quozienti de' resti divisi per 13. Riprendendo il quadro dell'operazione fatta al n° 73,

$$\begin{array}{r|l} 377 & \begin{array}{l} 156 \\ 2 \end{array} \\ \hline 29 & 12 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 65 & 2 \\ \hline 5 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

ecco come bisogna operar per l'oggetto. È chiaro che 13 è contenuto in 13 una volta e due volte in 26; si scrivano questi quozienti in una terza linea e in corrispondenza de' numeri 13 e 26. Ora essendo $65 = 26 \times 2 + 13$, 65 diviso per 13 sarà uguale alla somma de' quozienti delle sue parti, cioè al quoziente di 26 ripetuto due volte, più quello di 13; sarà quindi $2 \times 2 + 1 = 5$ il quoziente cercato, il quale si scriverà sotto il 65. Parimenti essendo $156 = 2 \times 65 + 26$, 156 diviso per 13 sarà uguale al quoziente di 65 ripetuto 2 volte, più quello di 26 ch'è stato già trovato: questo quoziente è 12. Si vede da ciò, che dopo aver scritto sotto l'ultimo numero il quoziente 1, e sotto il penultimo quello che vi si trova, i quozienti successivi si otterranno, moltiplicando fra loro i quozienti scritti sotto il resto precedente, e aggiungendo il numero che è a destra nella terza linea.

Pe' due numeri 3283, 1183 si procederà similmente.

$$\begin{array}{r|l} 3283 & \begin{array}{l} 1183 \\ 2 \end{array} \\ \hline 469 & 169 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 917 & 1 \\ \hline 131 & 38 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 266 & 3 \\ \hline 17 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 119 & 2 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

I numeri scritti nella terza linea sono i quozienti che risultano dal di-

sè stesso produce un numero maggiore del dato. Si domandino per es. i divisori primi di 163. Osservando che questo numero non può aver per divisori 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, e che $13 \times 13 = 169$, non si dovrà fare il saggio che sul numero 7; e siccome la divisione non riesce esattamente, se ne può conchiudere che 163 è numero primo. In effetti se 163 potesse avere un divisore maggiore di 13, siccome 13×13 dà un numero maggiore di 163, converrebbe che l'altro fattore fosse minore di 13, cioè 163 dovrebbe avere un divisore minore di 13; il che è impossibile.

79. Se due numeri si decompongono ne' loro fattori primi, riescono evidenti i loro fattori comuni; e il massimo comun divisor de' due numeri sarà uguale al prodotto di tutti i fattori primi comuni.

A R T. III.

Operazioni sulle frazioni.

§. I. Addizione e sottrazione.

80. Non si possono sommare o sottrarre che i numeri che esprimono collezioni di unità del medesimo ordine. Or l'ordine o la grandezza dell'unità nelle frazioni è rappresentata dal denominatore; perciò non si possono sommare o sottrarre che le frazioni aventi lo stesso denominatore; e la somma o la sottrazione si esegue sopra i numeratori. Per es., $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$, $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

81. Allorchè le frazioni hanno un denominatore diverso, per poterle sommare o sottrarre bisogna rapportarle a parti dell'unità della medesima grandezza, cioè convertirle in frazioni rispettivamente eguali alle prime e con lo stesso denominatore.

Sieno per es. le due frazioni $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Se si moltiplicano i termini della prima per 4 denominatore della seconda, e i termini della seconda per 3 denominatore della prima, queste frazioni si ridurranno a $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$. Si vede che il denominatore 12 è il prodotto de' due denominatori 3 e 4, e l'oggetto che si è avuto in mira è stato di divider l'unità in parti tanto piccole, sicchè una di queste fosse contenuta esattamente in una di quelle rappresentate dalle frazioni proposte. In effetti $\frac{1}{12}$ dell'unità è contenuto esattamente quattro volte in $\frac{1}{3}$, e tre volte in $\frac{1}{4}$.

Se si hanno più di due frazioni, si moltiplicheranno i

termini di ciascuna frazione pel prodotto di tutti i denominatori delle altre. Sieno per es. le frazioni

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{7},$$

Si moltiplicheranno i termini della prima per 35, quelli della seconda per 21, quelli della terza per 15, e si avranno le tre frazioni

$$\frac{70}{105}, \frac{84}{105}, \frac{30}{105},$$

rispettivamente eguali alle prime. È chiaro che questo metodo conduce sempre al fine proposto; giacchè il denominatore risulta dal prodotto di tutti i denominatori, il qual prodotto non varia qualunque sia l'ordine con cui si prendono i fattori (n° 26, III). Ridotte le frazioni allo stesso denominatore, si sommeranno i numeratori come nel caso precedente. La somma delle tre frazioni date è $\frac{2+4+2}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 1\frac{7}{105}$.

82. Per ridurre le frazioni allo stesso denominatore, facendo d'uopo divider l'unità in parti tanti piccole che alcune di esse sieno esattamente contenute in quelle di cui si compongono le frazioni date, basterà che si trovi un numero divisibile per ciascun denominatore. Il numero che risulta dal prodotto di tutti i denominatori soddisfa a questa condizione. Ma quando i denominatori non son numeri primi fra loro esiste sempre un denominatore comune più piccolo di quello che dà la regola generale. Sieno per es. le frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}.$$

Si tratterà di trovare il più piccolo numero che possa esser diviso da numeri 2, 4, 3, 6, 8. Osservando che 2 e 4 dividono 8, e che 3 divide 6, ogni numero divisibile per 6 e per 8 sarà anche divisibile per 2, 4, 3. Si può dunque far a meno di considerare i primi tre numeri, e la questione è ridotta a trovare il più piccolo numero divisibile per 6 e per 8. Prendendo i multipli di 8, si esamina quale di essi è divisibile per 6. Si trova che il più piccolo di questi multipli divisibile per 6 è 24. Questo sarà dunque il denominatore comune. Si moltiplicheranno perciò i termini di ciascuna frazione pel quoziente che si ottiene dividendo 24 pel denominatore della frazione che si considera. Nel caso attuale si moltiplicheranno i termini della prima

per 12, della seconda per 6, della terza per 8, della quarta per 4, della quinta per 3, e si avranno le frazioni

$$\frac{12}{24}, \frac{18}{24}, \frac{16}{24}, \frac{20}{24}, \frac{15}{24}.$$

In generale, il denominatore comune dev'esser il prodotto di tutti i fattori diversi che entrano ne' denominatori; per cui decomponendo i denominatori in fattori, sarà facile conoscere i fattori diversi e comporre il denominatore comune. Sieno per es.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{8}{9}, \frac{11}{12}, \frac{5}{6};$$

queste frazioni si possono scrivere

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2 \cdot 2}, \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3 \cdot 5}, \frac{8}{3 \cdot 3}, \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{5}{2 \cdot 3};$$

e si vede immediatamente che il denominatore comune dev'essere $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

83. Per far la sottrazione, si ridurranno pure le frazioni allo stesso denominatore, e si eseguirà la sottrazione su i numeratori. Per es. $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$.

La riduzione delle frazioni allo stesso denominatore fa conoscere, di due frazioni qual è la più grande. Per es. sieno date le frazioni $\frac{7}{8}$ e $\frac{9}{11}$. Per conoscer qual è la più grande si ridurranno allo stesso denominatore, e si avranno le frazioni $\frac{77}{88}$, $\frac{72}{88}$. Dunque la prima è maggiore della seconda, e l'eccesso è $\frac{5}{88}$.

84. Dovendo sommare interi uniti a frazioni, si farà prima la somma delle frazioni; se questa somma è maggiore di 1, se ne ricaveranno gl'interi che si uniranno alle unità. Nell'annesso esempio la somma delle frazioni è $\frac{111}{60} = 2 \frac{1}{60}$. Si scrive $\frac{1}{60}$, e 2 si riporta alla colonna delle unità.

$$\begin{array}{r} 554 \frac{2}{3} \\ 748 \frac{2}{3} \\ \hline 24 \frac{2}{3} \\ \hline 1128 \frac{1}{60} \end{array}$$

85. Nella sottrazione d'interi uniti a frazioni, se la frazione del numero superiore è minore della frazione del numero inferiore, si prenderà nel numero superiore un'unità

in prestito che si unirà alla frazione. Così nell'annes-
so esempio le due frazioni ridotte allo stesso de-
nominatore divengono $\frac{1}{11}$ e $\frac{9}{11}$. Non potendosi da $\frac{1}{11}$
sottrarre $\frac{9}{11}$, si staccherà dal numero 374 un'unità $\frac{11}{11}$
che si convertirà in $\frac{1}{11}$, e unendola alla frazione $\frac{1}{11}$,
si avrà $\frac{12}{11}$, da cui tolto $\frac{9}{11}$ resta $\frac{3}{11}$. Scritto $\frac{3}{11}$, si passa alla
sottrazione degl' interi, ricordandosi che la cifra 4 del nu-
mero superiore dev' esser diminuita di un'unità.

$$\begin{array}{r} 374 \frac{1}{11} \\ - 258 \frac{9}{11} \\ \hline 115 \frac{3}{11} \end{array}$$

§. II. Moltiplicazione , e divisione.

86. La moltiplicazione di una frazione per un intero si fa moltiplicando il numeratore o dividendo il denominatore (n° 61). La prima operazione è sempre possibile; la seconda in qualche caso. Così per es. il prodotto di $\frac{2}{3}$ per 3 si ottiene moltiplicando il numeratore, il che dà $\frac{6}{3}$. Il prodotto di $\frac{2}{3}$ per 2 si può ottenere dividendo il denominatore per 2, il che dà $\frac{2}{1}$. Questa seconda maniera di eseguir la moltiplicazione è da preferirsi alla prima quando il denominatore vi si presta, perchè si ottiene per prodotto una frazione più semplice.

87. Si divide una frazione per un intero o moltiplicando il suo denominatore o dividendo il numeratore per questo intero (n° 60). Così $\frac{8}{4} : 7 = \frac{8}{28}$; $\frac{8}{4} : 4 = \frac{2}{1}$. Nell' ultimo caso si è diviso il numeratore 8 per 4; e questa maniera, quando si può praticare, è preferibile (n° prec.).

88. Volendo moltiplicare 3 per $\frac{2}{5}$, bisogna (n° 21) comporre un numero per mezzo del moltiplicando come il moltiplicatore è composto per mezzo dell' unità. Ora per comporre $\frac{2}{5}$ bisogna divider l'unità in 5 parti, e prenderne 2; lo stesso dovrà farsi su di 3. La quinta parte di 3 è $\frac{3}{5}$, moltiplicando $\frac{3}{5}$ per 2 si ha $\frac{6}{5}$; dunque $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$. Cioè, si moltiplica un intero per una frazione, moltiplicando l'intero pel numeratore della frazione e dando al prodotto lo stesso denominatore.

Ma siccome $\frac{6}{5} \times 3$ è anche uguale a $\frac{6}{5}$ (n° 89), ne segue che la proposizione del n° 23 ha luogo anche quando uno de' fattori è una frazione.

89. Se si deve moltiplicare una frazione per un'altra, si

farà lo stesso ragionamento. Sia per es. $\frac{2}{3}$ da moltiplicarsi per $\frac{4}{5}$. Si otterrà il prodotto prendendo prima la quinta parte di $\frac{2}{3}$ e poi ripetendo questo quoziente 4 volte. Or $\frac{2}{3}$ si divide per 5 moltiplicando il suo denominatore, si moltiplica per 4 moltiplicando il suo numeratore; si avrà perciò $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$. Cioè due frazioni si moltiplicano, moltiplicando i numeratori fra loro, e i denominatori fra loro.

Da quanto si è detto si rileva che la moltiplicazione di un numero qualunque per una frazione si riduce a prender di questo numero una parte rappresentata dalla frazione. In questo caso la moltiplicazione non risveglia l'idea di ripetizione; anzi il prodotto è una parte del moltiplicando. La definizione data al n° 21 conviene a tutti i casi.

Al prodotto di più frazioni suol darsi qualche volta il nome di *frazione di frazione*. In effetti il prodotto di $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$ indica che della quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$ dell'unità principale se ne vogliono i $\frac{2}{3}$. Questo prodotto essendo $\frac{8}{15}$, ne segue che i $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ è $\frac{8}{15}$ dell'unità principale. E se di questa quantità se ne volessero i $\frac{3}{4}$, si avrebbe $\frac{8}{15} \times \frac{3}{4}$, ovvero $\frac{2}{5}$, che rappresenta i $\frac{2}{5}$ di $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$.

90. Per dividere un numero qualunque, intero o frazionario, per una frazione, bisogna (n° 30) considerare il dividendo composto per mezzo del quoziente della stessa maniera che il divisore è per mezzo dell'unità. Sia per es. 8 da dividersi per $\frac{5}{6}$. Essendo il divisore i $\frac{5}{6}$ dell'unità, il dividendo 8 sarà i $\frac{5}{6}$ del quoziente. Or se del quoziente si conoscono i $\frac{5}{6}$, prendendone la quinta parte si avrà $\frac{1}{6}$ del quoziente. Ma la quinta parte di 8 è $\frac{8}{5}$, ripetendo questa sei volte, si avrà il quoziente; il quale sarà $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$.

91. Se il dividendo fosse una frazione, si ragionerebbe allo stesso modo. Se per es. si deve dividere $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$, si dovrà prender la quarta parte di $\frac{2}{3}$ e ripetere il risultamento 7 volte. Il quarto di $\frac{2}{3}$ è $\frac{1}{6}$; moltiplicandolo per 7 si avrà il quoziente che è $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$. Da ciò si conchiude, che in ogni caso si deve moltiplicare il dividendo per la frazione divisore rovesciata.

Secondo che il divisore è maggiore o minore dell'unità, il quoziente sarà minore o maggiore del dividendo. Di fatto $6:2=3$, $6:\frac{2}{3}=9$.

Potendosi eseguir la divisione anche quando il dividendo

è minore del divisore, la parola contenere non è applicabile a' diversi casi che presenta la divisione. Perciò la definizione data al n° 30 è la sola che convenga a tutti.

92. Si osserverà che la moltiplicazione o la divisione delle frazioni dà luogo a due operazioni, cioè ad una moltiplicazione e ad una divisione. Or le regole date, dalle quali risulta che $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$, e

$$\frac{1}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{10}, \text{ si sono ricavate supponendo che le dette due operazioni si}$$

eseguano sempre per mezzo della moltiplicazione effettuata or sul numeratore or sul denominatore. Si potrebbero in qualche caso eseguir le dette due operazioni per mezzo della sola divisione effettuata or sul denominatore or sul numeratore. Per aver per es. il prodotto di $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{5}$, si deve moltiplicare la frazione $\frac{1}{4}$ per 4 e dividerla per 5. Si può moltiplicare per 4 dividendolo il denominatore e si può dividere per 5 dividendolo il suo numeratore, e si avrà per prodotto $\frac{1}{20}$. Riunendo le due regole risulta, che si moltiplicano due frazioni o moltiplicando fra loro i termini rispettivi, o rovesciando uno de' fattori e dividendolo i termini rispettivi. Così si ha $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Il primo modo si presta in ogni caso, il secondo richiede condizioni che non sempre si verificano.

Si ricava pur facilmente che si può eseguir la divisione di una frazione per un'altra, dividendolo i termini della prima frazione pe' termini rispettivi della frazione divisore. Così $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4}$, $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4}$. Quindi si divide una frazione per un'altra o moltiplicando i termini della prima pe' termini della seconda rovesciata, o dividendolo i termini della prima pe' termini della seconda. Il primo modo è sempre possibile, il secondo in qualche caso. Risulta da ciò, che due frazioni che hanno lo stesso denominatore si dividono dividendolo i numeratori. Perciò $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} = \frac{5}{4}$.

Ravvicinando fra loro le due operazioni, moltiplicazione e divisione delle frazioni, si vedrà che l'una si cangia nell'altra, rovesciando i termini del moltiplicatore in un caso, e del divisore nell'altro.

93. Se si debbono moltiplicare o dividere interi uniti a frazioni, il mezzo che si presenta il primo è quello di ridurre l'intero e la frazione ad un sol numero frazionario, e allora l'operazione si eseguirà con la regola generale. Si voglia per es. $137\frac{1}{4} \times 14\frac{1}{2}$; riducendo ciascun fattore ad un sol numero frazionario, si avrà $\frac{137\frac{1}{4}}{1} \times \frac{14\frac{1}{2}}{1} = \frac{137\frac{1}{4} \times 14\frac{1}{2}}{1} = 2020\frac{1}{4}$. Parimente $24\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{13\frac{1}{2}}{1} : \frac{2\frac{1}{2}}{1} = \frac{13\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = 10\frac{1}{4}$.

94. Bisogna però osservare, che moltiplicare $137\frac{1}{4}$ per $14\frac{1}{2}$ significa ripeter $137\frac{1}{4}$ quattordici volte e poi prenderne una parte indicata da $\frac{1}{2}$; e come le due suddette operazioni si debbono eseguire sopra ciascuna parte del moltiplicando,

L'operazione si riduce a moltiplicare 137 per 14, $\frac{1}{4}$ per 14, 237 per $\frac{2}{3}$, e $\frac{1}{4}$ per $\frac{2}{3}$.

Si può dunque eseguir la moltiplicazione degl' interi uniti a frazioni, moltiplicando prima gl' interi fra loro, poi la frazione di ciascun fattore per la parte intera dell' altro fattore, e infine le frazioni fra loro. L'operazione si dispone come qui appresso.

$$\begin{array}{r}
 137 \frac{1}{4} \\
 14 \frac{1}{4} \\
 \hline
 \text{prod. per } 4 \dots\dots 548 \\
 \dots\dots 10 \dots\dots 137 \\
 \dots\dots \frac{1}{4} \dots\dots 10 \frac{1}{4} \\
 \dots\dots \frac{1}{4} \dots\dots 91 \frac{1}{4} \\
 \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \dots\dots \frac{1}{6} \\
 \hline
 2020 \frac{1}{6}
 \end{array}$$

La prima e la seconda linea sono il prodotto 137×14 , la terza è $\frac{1}{4} \times 14$, la quarta è $137 \times \frac{2}{3}$. Riunendo questi diversi prodotti si ha il prodotto totale $2020 \frac{1}{6}$.

Questo modo di operare riesce vantaggioso quando gl' interi sono numeri molto grandi. Si osservi però, che nel fare il prodotto di 137 per $\frac{2}{3}$ è stato d'uopo moltiplicare prima 137 per 2 e poi dividere questo prodotto per 3; parimenti il prodotto di 14 per $\frac{1}{4}$ si è ottenuto moltiplicando 14 per 4 e dividendo il prodotto per 4. Queste operazioni, non potendo eseguirsi a mente, si dovranno fare in luogo separato.

95. Si può proceder più brevemente e scrivere subito i prodotti parziali, decomponendo ogni frazione in altre che abbiano per numeratore l' unità. Così la frazione $\frac{1}{4}$ si può decomporre in $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, ossia $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$ si può decomporre in $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$ si decomporrà in $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ ossia in $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$ si può decomporre in $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$, che equivalgono a $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}$ equivale a $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$, e così per le altre frazioni. Per mezzo di queste decomposizioni i prodotti per le frazioni si riducono ad una divisione semplicissima, che può farsi mentalmente. Seguendo questo metodo, l'operazione nell'e-

(60)

sempio proposto si riduce a quella che si vede qui sotto.

$$\begin{array}{r}
 137 \frac{3}{4} \\
 14 \frac{1}{2} \\
 \hline
 548 \\
 137 \\
 \hline
 \text{prod. per } \frac{1}{2} \dots\dots\dots 7 \\
 \dots\dots \frac{1}{4} \dots\dots\dots 3 \frac{1}{2} \text{ (si prende la metà del precedente)} \\
 \dots\dots \frac{1}{8} \dots\dots\dots 45 \\
 \dots\dots \frac{1}{16} \dots\dots\dots 45 \\
 \hline
 2020 \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Siccome $\frac{3}{4}$ non si può decomporre che in $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, si prenderà il prodotto di 137 per $\frac{1}{2}$, e questo si scriverà due volte.

Sia ancora quest' altro esempio.

$$\begin{array}{r}
 394 \frac{5}{6} \\
 58 \frac{7}{8} \\
 \hline
 3152 \\
 1970 \\
 \hline
 \text{prod. per } \frac{1}{2} \dots\dots\dots 29 \\
 \dots\dots \frac{1}{4} \dots\dots\dots 19 \frac{1}{2} \\
 \dots\dots \frac{1}{8} \dots\dots\dots 197 \\
 \dots\dots \frac{1}{16} \dots\dots\dots 98 \frac{1}{2} \\
 \dots\dots \frac{1}{32} \dots\dots\dots 49 \frac{1}{4} \\
 \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \dots\dots\dots \frac{35}{48} \\
 \hline
 25245 \frac{13}{16}
 \end{array}$$

Dopo aver fatto il prodotto di 394 per 58, si deve far quello di 58 per $\frac{5}{6}$. Or $\frac{5}{6}$ si può decomporre in $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ che equivalgono a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, e si ottengono questi prodotti prendendo prima la metà poi la terza parte di 58. In seguito decomponendo $\frac{7}{8}$ in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, si prende prima il prodotto di 394 per $\frac{1}{2}$, o (che è lo stesso) la metà di 394, e si ha 197; per prender poi il prodotto di 394 per $\frac{1}{4}$, basta prender la metà di 197, essendo $\frac{1}{4}$ la metà di $\frac{1}{2}$, e si ottiene 98 $\frac{1}{2}$; prendendo la metà di 98 $\frac{1}{2}$, si ottiene il prodotto di 394 per $\frac{1}{8}$, che è 49 $\frac{1}{4}$. Allo stesso modo bisogna regularsi in altri casi; e il metodo è conosciuto sotto il nome di *prender in parti*.

96. La decomposizione di una frazione in altre che abbiano per numeratore l'unità è sempre possibile; ma per maggior facilità bisogna procurare che ciascun prodotto sia la metà, la terza parte, ec. del prodotto precedente. Questa decomposizione non deve praticarsi che quando i numeratori delle frazioni parziali ne' quali si decompone la frazione data sono divisori del denominatore diversi dall'unità; in guisa che riesca inutile metterla in uso per le frazioni che hanno per denominatore un numero primo. Così per es. la frazione $\frac{6}{7}$ non si può decomporre che in $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \dots$

In questo caso si potrà procedere nel modo che vien dichiarato nell'esempio che segue.

$$\begin{array}{r}
 348 \frac{1}{4} \\
 \underline{127 \frac{6}{7}} \\
 2456 \\
 696 \\
 348
 \end{array}$$

prod. per $\frac{1}{2}$	49 $\frac{5}{7}$	
..... $\frac{5}{7}$	248 $\frac{4}{7}$	(si moltiplica il precedente par 5)
..... $\frac{1}{4}$	63 $\frac{3}{4}$	
..... $\frac{1}{4}$	21 $\frac{1}{2}$	
..... $\frac{1}{4}$	5 $\frac{3}{4}$	
	$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{4}$ $44563 \frac{1}{4}$	

Dovendo moltiplicare 348 per $\frac{6}{7}$ si prende prima la 7^a parte di 348 che è 49 $\frac{5}{7}$. Si potrebbe scriver questo numero cinque altre volte di seguito, ma sarà più facile moltiplicarlo per 5 e scriverne immediatamente al di sotto il prodotto 248 $\frac{4}{7}$. In seguito dovendosi moltiplicare 127 per $\frac{6}{7}$, si decomporrà la frazione in $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$; si troverà il prodotto per la prima, prendendo la metà di 127 che è 63 $\frac{3}{4}$; per aver quindi il prodotto per $\frac{1}{4}$ si dovrebbe prender la dodicesima parte di 63 $\frac{3}{4}$. Ma quando il divisore non è di una cifra, finisce il vantaggio del metodo, giacchè queste specie di divisioni non possono farsi a mente. Si ricorre allora ad un altro ripiego. Si prende prima il terzo di 63 $\frac{3}{4}$, e il quoziente ottenuto non dovendo esser compreso nella somma, si scriverà più in fuori o si segneranno con un tratto le sue cifre. Di questo numero si prende il quarto che è

è $5\frac{7}{11}$, e si avrà il prodotto per $\frac{1}{11}$. Allo stesso modo bisognerà regolarsi in altri casi. Questi prodotti che si cercano per render più facile l'operazione, si chiamano *prodotti ausiliari*.

97. Passando alla divisione degl' interi congiunti a frazioni, faremo avvertire che se il divisore non è accompagnato da frazioni, è inutile ridurre il dividendo a numero frazionario, imperocchè pervenuti all' ultimo residuo, questo unito alla frazione che segue si convertirà in un sol numero frazionario, che si dividerà pel divisore. Si debba per es. dividere $588\frac{2}{3}$ per 23. Pervenuti all' ultimo resto 5, si convertirà questo in $\frac{5}{3}$ che unito a $\frac{2}{3}$ forma $\frac{17}{3}$; il qual numero frazionario diviso per 23 dà $\frac{17}{69}$, e si ha il quoziente esatto $21\frac{17}{69}$.

$$\begin{array}{r|l} 588\frac{2}{3} & 23 \\ 28 & \\ 5 & \\ \hline & 21\frac{17}{69} \end{array}$$

98. Se poi anche il divisore è composto di un intero e di una frazione, basterà ridurre il solo divisore a un sol numero frazionario; poi, sopprimendo il denominatore del divisore e moltiplicando il dividendo per questo denominatore, la divisione rientra nel caso precedente. Sia per es. da dividersi $5734\frac{1}{2}$ per $27\frac{1}{2}$. Ridotto il divisore a $\frac{55}{2}$ si moltiplicherà il dividendo per 3, il che darà $17204\frac{1}{2}$ da dividersi per 83. S' intenderà la ragione di questo modo di operare, osservando che in ogni divisione il divisore dovendo figurar da numero astratto, non deve contener parti rapportati a diverse unità; e che essendo moltiplicato tanto il dividendo che il divisore per 3, non si altera il quoziente (n°46, V.).

A R T. IV.

Paragone fra i diversi sistemi di frazioni.

99. Le cifre decimali di un numero indicando parti dell' unità, potrebbero rappresentarsi secondo il sistema delle frazioni ordinarie. In effetti la frazione 0,457 equivale a $\frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$. Le frazioni decimali si possono dunque far rientrare nella classe delle frazioni ordinarie; e quindi tutte le proprietà di queste ultime si debbono trovare avverate nelle prime.

Di fatto per sommar le tre frazioni suddette bisogna ri-

durle allo stesso denominatore; e osservando che il denominatore comune è 1000, si ridurranno a $\frac{4}{1000} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{1000}$ che sommate danno $\frac{457}{1000}$, quanto appunto rappresenta la frazione 0,457. Dovendo moltiplicare 4,78 per 2,5, si avrà, secondo il sistema delle frazioni ordinarie, $\frac{478 \times 25}{100 \times 10}$; il che corrisponde a moltiplicare 4,78 per 2,5 come se la virgola non vi fosse, e poi dividere per 100×10 , ossia staccarne 4 cifre decimali. Lo stesso avviene per la divisione.

Le frazioni decimali però costituiscono un sistema particolare di frazioni, nel quale la legge di decremento dell'unità è costante; e sotto questo rapporto le operazioni, e particolarmente la riduzione allo stesso denominatore, si rendono estremamente più facili. Tale sarebbe pure il sistema delle frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16};$$

le quali si possono subito ridurre al denominatore dell'infima specie. Ma fra tutti i sistemi di questa natura, il decimale dipendendo dal sistema di numerazione, rende inutili i denominatori, e la loro calcolazione rientra in quella degl'interi. In questo precisamente consiste il loro principale vantaggio.

100. Una frazione, essendo una divisione indicata, si può convertire in decimali per mezzo della regola espressa al n° 52. Così si trova $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{5} = 0,625$. Se però si vuol ridurre $\frac{1}{7}$ a frazione decimale si troverà per quoziente fino alla sesta divisione 0,142857. Arrivati a questo punto si trova per resto 1; ritorna in conseguenza il primo dividendo 10. Dovendo ricomparire i medesimi dividendi, le cifre del quoziente saranno sempre le stesse di quelle ottenute, per quanto si prolunghi la divisione. Questo quoziente è dunque una frazione decimale che si compone sempre delle medesime cifre 142857, e che perciò chiamasi *periodica*. Le cifre che si ripetono formano il *periodo*.

101. Una frazione ordinaria si potrà convertire in frazione decimale esatta, quando nella serie de' numeri 10, 100, 1000, 10000, ec. ve n'è uno che può esser diviso pel denominatore della frazione. In effetti moltiplicandosi il nu-

meratore per uno di questi numeri, per es. per 1000, se il denominatore divide 1000, dividerà ancora i suoi multipli (n° 65). Ha luogo questa circostanza quando il denominatore è composto de' soli fattori 2 e 5 che sono fattori di 10, 100, 1000, ec. (n° 65, 3°).

In caso contrario la divisione deve necessariamente dare una frazione decimale periodica. Giacchè il resto dovendo esser minore del divisore, conviene che dopo un certo numero di divisioni si ritrovi necessariamente uno de' resti precedenti. Allora i dividendi parziali si riprodurranno collo stess' ordine, e si avranno le stesse cifre nel quoziente. Le cifre del periodo possono esser al più quante sono le unità del denominatore meno una; ma in molti casi sono in minor numero (V. nota al n° 70). Così $\frac{1}{11}$ convertito in decimali dà 0,076923 076293...; $\frac{1}{7}$ dà 0,09 09 09.....

102. Siccome una frazione si converte in decimi, o centesimi, ec. moltiplicando il suo numeratore per 10, 100, ec., si può con un metodo analogo convertire una frazione in un'altra di una specie data. Se per es. la frazione $\frac{4}{5}$ si vuol convertire in 13^{esimi}, si moltiplicherà 13 per 5 e si dividerà questo prodotto per 8. Il quoziente essendo 8, si avrà la frazione $\frac{8}{11}$ che differisce dalla data per meno di $\frac{1}{11}$.

103. Del pari che una frazione ordinaria si può convertire in decimale, si può una frazione decimale convertire in frazione comune.

1° Se la frazione è terminata, si scriverà sotto la forma di frazione ordinaria, e poi si ridurrà alla più semplice espressione. Così la frazione 0,625 è uguale a $\frac{625}{1000}$, e ridotta ad espressione più semplice, dividendo i suoi termini tre volte per 5, dà $\frac{1}{5}$.

2° Quando la frazione decimale è periodica, si può anche trovare la frazione ordinaria generatrice. A tal uopo bisogna osservare che $\frac{1}{9} = 0,111111....$, $\frac{1}{99} = 0,01 01 01....$, $\frac{1}{999} = 0,001 001 001....$, ec.

Ciò posto si avrà

$$0,333 \dots = 3 \times 0,111111.... = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,2727 \dots = 27 \times 0,01 01 01.. = 27 \times \frac{1}{99} = \frac{3}{11}$$

$$0,152152... = 152, \times 0 001 001.. = 152 \times \frac{1}{999} = \frac{152}{999}$$

.....

È facile il conchiudere che ogni frazione decimale periodica è uguale ad una frazione ordinaria che ha per numeratore le cifre del periodo e per denominatore un numero composto di tanti 9 per quante sono le cifre del periodo. Le frazioni trovate $\frac{3}{9}$, $\frac{37}{99}$, $\frac{333}{999}$ si riducono alle espressioni più semplici $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ (n° 75).

104. Per ben intender la natura delle frazioni decimali periodiche si consideri la frazione $0,9999 \dots$, che secondo la regola è uguale a $\frac{9}{9}=1$. Sembra a prima vista assurdo, che una frazione sia eguale a un intero. Si rifletta però che se nella frazione $0,9999 \dots$ ci arrestiamo alla prima cifra, la differenza dall'unità sarà $\frac{1}{10}$; se alla seconda cifra è $\frac{1}{100}$; se alla terza, $\frac{1}{1000}$; se alla quarta, $\frac{1}{10000}$; e così di seguito. Si vede adunque che la frazione $0,9999 \dots$ tanto più si avvicina a 1 quanto più si estende. Nondimeno, qualunque sia il numero delle cifre prese, non potrà mai aversi esattamente l'unità. L'unità dunque è una quantità verso la quale la frazione $0,9999 \dots$ si va sempre più avvicinando senza potervi mai arrivare, e perciò n'è il *limite*. Per esprimere l'impossibilità di assegnare il numero delle cifre che si dovrebbero prendere per formare l'unità, si dice che questo numero di cifre dev'esser *infinito*; secondo questo linguaggio la frazione $0,9999 \dots$ prolungata all'infinito è uguale a 1. La differenza fra l'unità e la frazione diviene allora tanto piccola da non potersi assegnare, il che si esprime col dir che diviene *infinitesima*. La stessa idea bisogna formarsi delle altre frazioni decimali periodiche; le frazioni ordinarie corrispondenti sono i limiti verso i quali convergono, ossia sono i numeri a cui i loro valori tendono a divenir eguali.



C A P O IV.

DE' NUMERI COMPLESSI.

105. I metodi finora dati per eseguir le quattro operazioni su i numeri interi o frazionari sono indipendenti dalla specie dell' unità di cui questi numeri rappresentano le collezioni. Ma ogni calcolo da eseguirsi avendo relazione ad una quistione determinata, il risultamento che si cerca ha spesso una dipendenza necessaria dalla specie dell' unità di parecchi de' numeri su i quali deve operarsi. Ora se per le diverse specie di quantità da misurarsi le suddivisioni o i multipli delle unità principale seguissero il sistema di numerazione, il calcolo de' numeri concreti rientrerebbe in quello de' numeri interi ed astratti, e sarebbe perciò il più facile di tutti. Ma ciò s' incontra di rado, trovandosi le diverse specie di unità, ora divise in 12 parti, ora in 8, ora in 16, cc.

I numeri concreti ne' quali le suddivisioni dell' unità principale non seguono il sistema decimale, si chiamano *numeri complessi*.

106. Prima di parlare del calcolo de' numeri complessi, enuncieremo le suddivisioni di quelle misure, delle quali avremo a far uso negli esempi.

Il *tempo* generalmente si misura, dividendo il giorno in 24 ore, l' ora in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 secondi. I minuti primi s' indicano con un accento, e i secondi con due. Per indicare 3 ore, 17 min. primi e 13 secondi si scrive $3^{\text{or}} 17' 13''$.

Alcune misure della Città di Napoli.

Misure di lunghezza. L' unità si chiama *palmo*, che si divide in 12 *once* e l' oncia in 5 *minuti*. Otto palmi formano una *canna*.

Pesi. L' unità si chiama *libbra*; si divide in 12 *once*, l' oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *trappesi*, il trappeso in 20 *acini* o *grani*. Per alcuni generi s' impiega il *rotolo* che equivale a once $33\frac{1}{2}$. Un peso di 100 rotoli si chiama *cantajo*.

L'unità monetaria è il *ducato*, che si divide in 100 *grani*, e il grano in 12 *cavalli*.

Alcune misure di Parigi.

Misure di lunghezza. L'unità si chiama *tesa*; si divide in 6 *piedi*, il piede in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*.

Pesi. L'unità si chiama *libbra*, che si divide in 16 *once*, l'oncia in 8 *grossi* o *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 24 *grani*.

L'antica unità di moneta si chiamava *lira*; si divideva in 20 *soldi*, e il soldo in 12 *denari*.

107. Il calcolo de' numeri complessi riesce facile a chi ha ben capito lo spirito de' metodi nel calcolo de' decimali e delle frazioni. Non si tratta che di applicare i medesimi principii generali da cui quelle operazioni dipendono, e di estendere a delle divisioni arbitrarie dell'unità i metodi dati pel caso in cui l'unità sia divisa e suddivisa sempre in 10 parti.

A R T. I.

Conversione de' numeri complessi.

108. Conoscendo in un numero complesso le suddivisioni dell'unità, sarà facile trovare quante unità di una specie data contiene l'unità principale. Infatti una tesa è 6 piedi, e poichè 1 piede è 12 pollici, la tesa sarà poll. $6 \times 12 = 72$; e siccome ogni pollice è 12 linee, sarà la tesa eguale a lin. $72 \times 12 = 864$ linee. Nel modo stesso si trova facilmente

$$\begin{aligned} 1^{\text{can.}} &= 8^{\text{pal.}} = 96^{\text{on.}} = 480^{\text{m.}} \\ 1^{\text{lib.}} &= 12^{\text{on.}} = 120^{\text{dr.}} = 360^{\text{trsp.}} = 7200^{\text{gr.}} \end{aligned}$$

109. Ogni numero complesso si può scrivere sotto la forma di frazione ordinaria. Sia per es. il numero $7^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}} 2^{\text{on.}} 4^{\text{m.}}$. Conoscendo qual parte il palmo, l'oncia e il minuto è della canna, quel numero si potrà scrivere canne $7 + \frac{3}{8} + \frac{2}{96} + \frac{4}{480}$. Il denominatore 480 essendo divisibile per 8 e per 96, sarà 480 il denominatore comune delle tre frazioni, e si avrà $7 + \frac{3 \times 60 + 2 \times 5 + 4}{480}$, ovvero $\frac{7 \times 480 + 3 \times 60 + 2 \times 5 + 4}{480} = \frac{3554}{480}$. Ri-

ducendo la frazione all' espressione più semplice, si avrà $7^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}} 2^{\text{on.}} 4^{\text{m.}} = 7 \frac{9}{11}$ canne; o pure, svolgendo la frazione medesima in decimali, il numero proposto potrà esprimersi per canne 7,4041515...

110. L'operazione necessaria a farsi per trasformare un numero complesso in frazione ordinaria serve anche per convertire questo numero in unità dell' infima specie. In effetti $\frac{2554}{48}$ di canna rappresenta evidentemente 3554 minuti.

Ma però l'operazione può esser resa più semplice, convertendo successivamente le unità di una data specie in quelle dell'ordine immediatamente inferiore, come si vede qui praticato su l' esempio del n° prec.

Si moltiplicano le 7 canne per 8 denominatore dell' unità immediatamente inferiore, e si avrà 56 che esprime il numero de' palmi contenuto in 7 canne; e aggiuntovi 3 palmi, si avrà 59 palmi $= 7^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}}$. Moltiplicando 59 per 12, si convertirà questo numero di palmi in once; e aggiunte al prodotto le 2 once date, si avrà $710^{\text{onc.}} = 7^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}} 2^{\text{on.}}$. Moltiplicando 710 per 5, si convertiranno le once in minuti, che co' 4 minuti dati formeranno 3554 minuti.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 8 \\
 \hline
 56 \\
 3 \\
 \hline
 59 \\
 12 \\
 \hline
 118 \\
 59 \\
 \hline
 708 \\
 2 \\
 \hline
 710 \\
 5 \\
 \hline
 3550 \\
 4 \\
 \hline
 3554
 \end{array}$$

Effettuando sul numero 3554, che rappresenta minuti, delle operazioni inverse alle precedenti, il medesimo si convertirà in once, palmi e canne. Si dividerà perciò prima per 5, denominatore de' minuti riferito all' unità immediatamente superiore cioè all' once, e si avrà il quoziente 718 e il resto 4; e sarà $3554 \text{ minuti} = 710^{\text{onc.}} 4^{\text{m.}}$. Si dividerà il quoziente 710 per 12, denominatore delle once rispetto ai palmi, e si avrà il quoziente 59 e il resto 2; sarà quindi $3554^{\text{m.}} = 59^{\text{pal.}} 2^{\text{on.}} 4^{\text{m.}}$. Dividendo in fine 59 per 8 si avrà il quoziente 7 e il resto 3; per cui $3554^{\text{m.}} = 7^{\text{c.}} 3^{\text{pal.}} 2^{\text{on.}} 4^{\text{m.}}$.

L'operazione si disporrà come quì appresso.

$$\begin{array}{r|l}
 3554 & 5 \\
 4 & \overline{710} \quad 12 \\
 & \overline{110} \quad \overline{59} \quad 8 \\
 & \quad 2 \quad \quad 3 \quad \quad \overline{7}
 \end{array}$$

Si scriverà l'ultimo quoziente e i resti successivi ma presi in ordine retrogrado; e si darà a ciascuno la denominazione che gli compete secondo l'ordine di successione.

Sia dato il numero $2^{\text{tes.}} 5^{\text{pie.}} 4^{\text{pol.}} 3^{\text{lin.}}$ da ridursi a linee. Si farà l'operazione posta a lato, e si troverà il numero proposto espresso in linee ed eguale a 2499 linee. Volendo esprimere lo stesso numero in frazioni, conoscendo che la linea è $\frac{1}{864}$ della tesa, sarà

$$2^{\text{tes.}} 5^{\text{pie.}} 4^{\text{pol.}} 3^{\text{lin.}} = \text{tese } \frac{2499}{864} = 2 \frac{771}{864} = 2 \frac{857}{960}.$$

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 6 \\
 \hline
 12 \\
 5 \\
 \hline
 17 \\
 12 \\
 \hline
 34 \\
 17 \\
 4 \\
 \hline
 202 \\
 18 \\
 \hline
 416 \\
 208 \\
 3 \\
 \hline
 2499
 \end{array}$$

Parimenti, se il numero 34798 grani (misura di Parigi) si voglia convertire in numero complesso, si farà la seguente operazione.

$$\begin{array}{r|l}
 34798 & 24 \\
 107 & \overline{1449} \quad 3 \\
 119 & \quad 24 \quad \overline{483} \quad 8 \\
 258 & \quad \quad 9 \quad \quad \overline{60} \quad 16 \\
 22 & \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 12 \quad \overline{3}
 \end{array}$$

L'ultimo quoziente è 3, e i residui sono 12, 3, 0, 22; per cui il numero 34798 grani = $3^{\text{lib.}} 12^{\text{onc.}} 3^{\text{dr.}} 0^{\text{scr.}} 22^{\text{gr.}}$

Così si ha

$$12^{\text{liv.}} 14^{\text{sol.}} 7^{\text{den.}} = 3055 \text{ denari} = \frac{3055}{12} \text{ lire} = \frac{611}{4} = \text{lire } 12 \frac{3}{4};$$

$$284541'' = 3^{\circ} 7^{\circ} 2' 21''.$$

Quel che si fa ne' numeri interi o decimali per ridurre tutto il numero ad unità dell' infima specie non è che un caso particolare del precedente, Per es. il numero 3783 esprime 3^{migliaja} 7^{centina}, 8^{dieci}, 4^{un.}. Se si moltiplicano le 3 migliaia per 10, si ridurranno a 30 centinaia, che colle 7 centinaia formano 37 centinaia. Moltiplicate queste nuovamente per 10, si convertono in 370 decine, che colle 8 decine date formano 378 decine. In fine moltiplicando nuovamente per 10 e aggiungendo le 4 unità, si ha il numero stesso convertito in 3784 unità. Il metodo adunque è lo stesso; ma in quest' ultimo caso le conversioni si fanno senza effettuare operazione, perchè la moltiplicazione dipende dalla sola situazione delle cifre.

111. L' indicato modo di operare risulta ancor più evidente, osservando che nell'esempio del n° 109 il numero 3554 si ottiene effettuando le qui indicate operazioni: $7 \times 480 + 3 \times 60 + 9 \times 5 + 4$, le quali si decompongono in operazioni più semplici, cioè $7 \times 8 \times 12 \times 5 + 3 \times 12 \times 5 + 2 \times 5 + 4$. Ora è chiaro che dividendo quest' ultimo numero per 5 si ha per resto 4 e per quoziente $7 \times 8 \times 12 + 3 \times 12 + 2$; dividendo questo quoziente per 12 si ha per resto 2 e per quoziente $7 \times 8 + 3$; e dividendo quest' ultimo numero per 8, si ha per resto 3 e per quoziente 7. Facendo l' operazione inversa, si hanno i numeri $7 \times 8 + 3$, $7 \times 8 \times 12 + 3 \times 12 + 2$, $7 \times 8 \times 12 \times 5 + 3 \times 12 \times 5 + 2 \times 5 + 4$, l' ultimo de' quali è il numero richiesto, cioè 3554.

112. Si debba ora convertire in numero complesso un numero frazionario dell' infima specie, come per esempio

$\frac{3178481''}{13}$. Estraeendo da questo numero gl' interi cioè dividendo 3178481 per 13, si avrà $244498'' \frac{1}{13}$. Si tratterà ora di convertire $244498''$ in minuti primi, ore e giorni secondo la regola assegnata, cioè dividendo il detto numero per 60, poi il nuovo quoziente per 60, poi l' altro per 24. Si vede dunque che il divisore 13 si può considerare come formante parte della serie de' divisori, e quindi l' operazione è uniforme. Il primo residuo è il numeratore della frazione che deve accompagnare il numero dell' infima specie. Ecco

il quadro dell'operazione.

$$\begin{array}{r|l}
 3178481'' & 13 \\
 \hline
 57 & 244498'' \\
 58 & 449 \\
 64 & 298 \\
 128 & 58'' \\
 111 & \\
 7 &
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 60 & \\
 \hline
 4074' & 60 \\
 474 & 67^{or.} \\
 54' & 19^{or.}
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 24 & \\
 \hline
 29.
 \end{array}$$

e perciò

$$\frac{3178481''}{13} = 2^{\circ} 19^{or.} 54' 58'' \frac{7}{13}$$

113. Se si ha un numero concreto espresso in frazione ordinaria e rapportato all'unità principale, è facile convertirlo in numero complesso. Si abbia per es. il numero: canne $2\frac{1}{7}$, e si voglia la frazione $\frac{1}{7}$ esprimere in palmi, canne e minuti. Bisogna in primo luogo convertirla in minuti, e siccome il minuto è $\frac{1}{480}$ della canna, quella frazione sarà eguale a minuti $\frac{480 \times 1}{7}$ cioè $\frac{1440}{7}$ di minuto. Si tratterà ora colla

regola precedente di esprimere in numero complesso il quoziente di $1440^{\text{min.}}$ diviso per 7; il quale sarà $3^{\text{pal.}} 5^{\text{on.}} 0^{\text{min.}} \frac{6}{7}$.

In vece di convertire la frazione di canna $\frac{1}{7}$ immediatamente in minuti, e poi da' minuti ripassare alle once e palmi, sarà forse più facile e più breve convertire la frazione $\frac{1}{7}$ in palmi moltiplicandola per 8. Si avrà così $\frac{8}{7}$ di canna eguale a $2\frac{4}{7}$ di palmo = pal. $3\frac{4}{7}$. Si convertirà questa frazione di palmo in once, moltiplicandola per 12, e sarà $\frac{48}{7}$ di palmo = $6\frac{6}{7}$ di once = once $5\frac{6}{7}$. Convertendo finalmente $\frac{6}{7}$ di oncia in minuti, si avrà $\frac{6}{7}$ di oncia = $0^{\text{on.}} \frac{6}{7}$. Dunque

$$\text{can. } 3\frac{1}{7} = 3^{\text{can.}} 3^{\text{pal.}} 5^{\text{on.}} 0^{\text{min.}} \frac{6}{7};$$

risultamento identico al precedente. È facile ravvicinare questi due modi di operare.

Parimenti nel numero $13^{\text{tes.}} 457$ si esprimerà la frazione decimale per mezzo delle suddivisioni della tesa operando

come si vede scritto.

$$\begin{array}{r}
 0,457 \\
 \underline{6} \\
 2,742
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0,742 \\
 \underline{12} \\
 1\ 484 \\
 \underline{7\ 42} \\
 8,904
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0,904 \\
 \underline{12} \\
 1\ 808 \\
 \underline{9\ 04} \\
 10,848
 \end{array}$$

Sicchè sarà

$$13^{\text{tes.}}, 457 = 13^{\text{tes.}}\ 2^{\text{pièd.}}\ 8^{\text{pol.}}\ 10^{\text{lin.}}, 848.$$

A R T. II.

Operazioni su i numeri complessi.

§. I. Addizione e sottrazione.

114. L'addizione de' numeri complessi si esegue scrivendo le une sotto le altre le unità della medesima denominazione; e poi, cominciando dalle unità dell' infima specie, si faranno tante somme parziali, quante sono le specie di unità delle quali si compongono i numeri dati. Se le somme parziali non contengono tante unità quante ne bisogna per formare una o più unità dell' ordine che segue immediatamente, si scriveranno nel luogo della somma; in caso diverso, si divideranno pel loro denominatore, si scriverà il resto, e il quoziente si riporterà alla colonna seguente. A schiarimento di quanto si è detto si guardi l' esempio che segue.

La somma delle linee è 32, e siccome 32 $5^{\text{tes.}} 3^{\text{pi.}} 4^{\text{pol.}} 2^{\text{lin.}}$ linee equivalgono a $\frac{32}{12}$ di pollici, si scriverà 2 5 7 11 il resto 8, e il quoziente 2 si riporta alla colonna de' pollici. La somma de' pollici è 31, e siccome 31 pollici è uguale a $\frac{31}{12}$ di piede, si dividerà 31 per 12, il resto 7 si scriverà e si riporterà 2 alla colonna seguente. E così di seguito.

Ecco altri esempi per esercizio.

$$\begin{array}{r}
 7^{\text{can.}}\ 4^{\text{pal.}}\ 0^{\text{on.}}\ 2^{\text{m.}}\ \frac{1}{6} \\
 \underline{5\ 3\ 11\ 3} \\
 2\ 7\ 9\ 1 \\
 \underline{8\ 6\ 5\ 4} \\
 2\frac{1}{2}^{\text{can.}}\ 6^{\text{pal.}}\ 1^{\text{on.}}\ 1^{\text{m.}}\ \frac{1}{6}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 18^{\text{gio.}}\ 3^{\text{or.}}\ 16'\ 39'' \\
 \underline{2\ 14\ 18\ 19} \\
 13\ 23\ 7\ 59 \\
 \underline{4\ 22\ 59\ 47} \\
 39^{\text{gi.}}\ 15^{\text{or.}}\ 42'\ 44''
 \end{array}$$

115. La sottrazione parimenti non ammette difficoltà, giacchè trattasi di eseguirla sopra unità del medesimo nome. Se qualche sottrazione parziale fosse impossibile perchè il numero superiore è minore dell' inferiore, si prenderà in prestito un' unità dell' ordine che segue immediatamente. Ecco un esempio.

Da 6 once non potendosi sottrarre 11 once, $12^{\text{can.}} - 5^{\text{pal.}} - 6^{\text{on.}} - 4^{\text{min.}}$ si prenderà in prestito 1 palmo che si converte in 12 once, e si farà la sottrazione togliendo 11 da 18; e così di seguito. Per render la sottrazione possibile, si viene a decomporre il numero superiore in $11^{\text{can.}} - 12^{\text{pal.}} - 18^{\text{on.}} - 4^{\text{m.}}$. Aggiungiamo per maggior dilucidazione un altro esempio.

$$\begin{array}{r}
 7^{\text{lib.}} \quad 0^{\text{on.}} \quad 0^{\text{tro.}} \quad 2^{\text{scr.}} \quad 13^{\text{ac.}} \\
 \underline{2 \quad 15 \quad 7 \quad 2 \quad 23} \\
 4 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 14
 \end{array}$$

Del modo come l'operazione è eseguita si troverà la ragione, osservando che il numero superiore si è decomposto in $6^{\text{lib.}} - 15^{\text{on.}} - 7^{\text{tro.}} - 4^{\text{scr.}} - 37^{\text{ac.}}$.

§. II. Moltiplicazione e divisione.

116. Consideriamo in primo luogo il caso in cui si debba dividere un numero complesso per un numero intero ed astratto; e per poter ragionare prendiamo il numero (mis. di Napoli) $2138^{\text{lib.}} - 7^{\text{on.}} - 4^{\text{dr.}} - 1^{\text{trep.}} - 15^{\text{gr.}}$ da dividersi per 124.

La prima idea che si presenta è forse quella di convertire il dividendo in unità dell' infima specie cioè in grani (n° 110); e allora questa divisione rientra nel caso del n° 112. Ma trattandosi di aver il quoziente in numero complesso, col distruggere questo carattere nel dividendo non si farebbe che allungare considerevolmente il calcolo. Riflettendo poi che il quoziente si ottiene col dividere pel divisore ciascuna parte di cui si compone il dividendo (n° 33), si tratterà di decomporre il dividendo in siffatto numero di libbre, once, dramme, ec., che ciascuna parte sia separatamente divisibile per 124. La qual cosa si esegue facilmente, convertendo ogni resto in unità della specie che segue; e può conoscersi il modo come bisogna condurre il calcolo, osservando l'ope-

razione che segue, effettuata sull' esempio proposto.

$$\begin{array}{r|l}
 1^{\text{a}} \text{ div. } 2138^{\text{lib.}} & 7^{\text{on.}} \quad 4^{\text{dr.}} \quad 1^{\text{tr.}} \quad 15^{\text{gr.}} \\
 \quad 898 & \\
 \quad \quad 30^{\text{lib.}} & \\
 \hline
 \quad \quad 12 & \\
 \quad 360 & \\
 \hline
 \quad \quad 7 & \\
 2^{\text{a}} \text{ div. } 367^{\text{on.}} & \\
 3^{\text{a}} \text{ div. } 1194^{\text{dr.}} & \\
 \quad \quad 78^{\text{dr.}} & \\
 \quad \quad \quad 3 & \\
 \hline
 \quad \quad 234 & \\
 \quad \quad \quad 1 & \\
 4^{\text{a}} \text{ div. } 235^{\text{tr.}} & \\
 \quad \quad 111^{\text{tr.}} & \\
 \quad \quad \quad 20 & \\
 \hline
 \quad \quad 220 & \\
 \quad \quad \quad 15 & \\
 5^{\text{a}} \text{ div. } 2235^{\text{gr.}} & \\
 \quad \quad 995 & \\
 \quad \quad \quad 3^{\text{gr.}} &
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 124 \\
 \hline
 17^{\text{lib.}} \quad 2^{\text{on.}} \quad 9^{\text{dr.}} \quad 1^{\text{tr.}} \quad 18^{\text{gr.}} \quad \frac{1}{11}
 \end{array} \right.$$

Dopo aver diviso 2138 per 124 si ha il resto 30 libbre. Si convertono le libbre in once moltiplicandole per 12, il che dà 360 once, che colle 7 once date nel dividendo formano 367 once. Divise queste per 124 danno per residuo 119. Si converte questo numero di once in dramme; e siccome l'oncia si divide in 10 dramme, basterà calare il 4 del dividendo, e si ha 1194 dramme. Divise per 124 danno per residuo 78, che si converte in trappesi moltiplicandolo per 3; e così di seguito.

Se il numero da dividersi fosse solamente 2138^{lib.}, l'operazione così eseguita coinciderebbe con quella del n° 113.

La divisione de' numeri interi o decimali non è che un caso particolare del precedente. Ogni resto si converte in unità dell'ordine immediatamente inferiore, e vi si aggiungono le unità dell'ordine immediatamente superiore. Ma ne' numeri scritti secondo il sistema di numerazione, la moltiplicazione per 10 e l'addizione della cifra seguente si fa col solo calare della cifra stessa.

117. Si può moltiplicare un numero complesso per un numero intero ed astratto procedendo con operazioni inverse a quelle effettuate per la divisione. Sia per es. da moltiplicarsi $13^{\text{can.}}$ $7^{\text{pal.}}$ $3^{\text{onc.}}$ $2^{\text{m.}}$ $\frac{2}{3}$ per 25; si disporrà l'operazione come si vede qui appresso.

$$\begin{array}{r}
 13^{\text{can.}} \ 7^{\text{pal.}} \ 3^{\text{onc.}} \ 2^{\text{m.}} \ \frac{2}{3} \\
 25 \\
 \hline
 65^{\text{can.}} \\
 26 \\
 \text{per 7 palmi } 21 \ 7^{\text{pal.}} \\
 \text{per 3 onces } 6 \ 3^{\text{onc.}} \\
 \text{per 2 minuti } 10 \\
 \text{per 2 terzi di min. } 3 \ 1^{\text{m.}} \ \frac{2}{3} \\
 \hline
 347^{\text{c.}} \ 6^{\text{pal.}} \ 4^{\text{onc.}} \ 1^{\text{m.}} \ \frac{2}{3}
 \end{array}$$

Dopo aver moltiplicato 13 per 25, si moltiplicherà 7 per 25, il che dà 175 palmi; dividendo per 8 si ha $21^{\text{c.}}$ $7^{\text{pal.}}$. Si moltiplicherà in seguito $3^{\text{onc.}}$ per 25 e si avrà 75 onces, e dividendo per 12 si avrà $6^{\text{pal.}}$ $3^{\text{onc.}}$. E così si continuerà. Questi prodotti parziali si trovano in luogo separato, e poi si scrivono nel sito proprio a ciascuno.

Si potrebbe anche ridurre il moltiplicando ad unità dell'infima specie e moltiplicarlo poscia per 25. Il prodotto ottenuto si convertirebbe nuovamente in numero complesso, giusta il metodo esposto al n° 110.

118. Avendo mostrato come si esegua la moltiplicazione e la divisione di un numero complesso per un numero astratto, passiamo al caso in cui il moltiplicatore o il divisore sieno anche numeri complessi.

E cominciando dalla moltiplicazione, si osserverà che trattandosi di comporre un numero per mezzo del moltiplicando come il moltiplicatore lo è per mezzo dell'unità (n° 21), il moltiplicatore deve figurar sempre da numero astratto, e il prodotto dev'esser della stessa natura del moltiplicando. Si tratterà dunque di mostrare come si riduce il moltiplicatore a numero astratto. Intanto è d'uopo avvertire che non è indifferente, come ne' numeri astratti, prender per moltiplicando uno qualunque de' due fattori. L'enunciato della questio-

ne , determinando la natura del prodotto, indica quale de' due fattori dev' esser preso per moltiplicando.

Si domandi l'importo di $24^{\text{tes.}} 5^{\text{pi.}} 7^{\text{pol.}}$ di un dato lavoro, pagandosi a $15^{\text{li.}} 7^{\text{sol.}} 2^{\text{den.}}$ la tesa. Il numero che si cerca dovendo esser espresso in lire, è chiaro che $15^{\text{li.}} 7^{\text{sol.}} 2^{\text{den.}}$ dev'esser il moltiplicando. E siccome il moltiplicatore deve figurar da numero astratto, si tratterà di ripeter $15^{\text{li.}} 7^{\text{sol.}} 2^{\text{den.}}$ ventiquattro volte, e poi prenderne la stessa parte che $5^{\text{pi.}} 7^{\text{pol.}}$ è della tesa. Ora essendo $24^{\text{tes.}} 5^{\text{pi.}} 7^{\text{pol.}} = \frac{24 \times 7 \times 5}{7 \times 5}$ di tesa, si dovrà moltiplicare $15^{\text{li.}} 7^{\text{sol.}} 2^{\text{den.}}$ per $\frac{24 \times 7 \times 5}{7 \times 5}$; il che si fa moltiplicando prima per 1795 e poi dividendo il prodotto per 72; o viceversa. Ecco l'operazione.

$$\begin{array}{r}
 15^{\text{li.}} 7^{\text{sol.}} 2^{\text{den.}} \\
 1795 \\
 \hline
 8975^{\text{li.}} \\
 1795 \\
 \text{per } 7 \text{ sol.} \dots\dots\dots 628 \quad 5^{\text{sol.}} \\
 \text{per } 2 \text{ den.} \dots\dots\dots 14 \quad 19 \quad 2^{\text{den.}} \\
 \hline
 \text{Prodotto} \dots\dots\dots 27568^{\text{li.}} 4^{\text{sol.}} 2^{\text{den.}} \quad \left| \begin{array}{l} 72 \\ \hline 384^{\text{li.}} 17^{\text{sol.}} 10^{\text{den.}} \frac{2}{3} \end{array} \right. \\
 596 \\
 208 \\
 \text{Resto in lire} \dots\dots 64 \\
 20 \\
 \hline
 1280 \\
 4 \\
 \hline
 1284^{\text{sol}} \\
 564 \\
 \text{Resto in soldi} \dots\dots 60 \\
 12 \\
 \hline
 720 \\
 2 \\
 \hline
 722 \\
 \text{Resto in den.} \dots\dots 2
 \end{array}$$

119. Se anche il moltiplicando si mettesse sotto forma di frazione, si tratterebbe di moltiplicar fra loro degl' interi uniti a frazioni. Si può con molto vantaggio applicare a questo caso il metodo esposto al n° 95, decomponendo le parti frazionarie de' due fattori in frazioni che hanno per nu-

meratore l'unità. Riprendiamo l'esempio di sopra, affinchè il confronto de' due metodi dia maggior risalto a quello che passiamo ad esporre.

	15 ^{lir.}	7 ^{sol.}	2 ^{den.}	
	24 ^{tes.}	5 ^{pi.}	7 ^{pol.}	
	60 ^{lir.}			
	30			
per 5 sol.....	6			
per 2 sol.....	2	8 ^{sol.}		
per 2 den.....	0	4		
per 3 pied.....	7	13	7 ^{den.}	
per 2 pied.....	5	2	4	2
per 6 pol.....	1	5	7	1
per 1 pol.....	0	4	3	1
	382 ^{lir.}	17 ^{sol.}	10 ^{den.}	1
				16

Dopo aver fatto il prodotto di 15 per 24 si deve moltiplicare 24 per 7 soldi. Si decomporrà questo numero in 5 soldi più 2 soldi; il prodotto di 24 per 1 lira sarebbe 24 lire, essendo 5 soldi la quarta parte di 1 lira, il prodotto sarà la quarta parte di 24^{lir.}. Parimenti essendo 2 soldi la decima parte di 1 lira, si prenderà la 10^a parte di 24, decomponendo questo numero secondo le suddivisioni della lira. Essendo 2 denari la dodicesima parte di 2 soldi, si avrà il prodotto di 24 per 2 denari, prendendo la dodicesima parte del prodotto precedente. Tutti questi prodotti parziali compongono il prodotto del moltiplicando per 24. Il prodotto del moltiplicando per 1, darebbe il moltiplicando; decomponendo 5 piedi in 3 piedi e 2 piedi, si otterranno questi due prodotti prendendo la metà e poi la terza parte del moltiplicando. Si decomporrà poi 7 pollici in 6 pollici più 1 poll.; e siccome 6 pollici sono la metà di un piede o la quarta parte di 2 piedi, si prenderà il quarto del prodotto precedente, e si avrà 1^{lir.} 5^{sol.} 7^{den.} $\frac{1}{2}$. In fine la sesta parte di questo numero darà il prodotto per 1 pollice.

120. Se in vece della quistione or ora risolta fosse data quest'altra: Con una lira si hanno 24^{tes.} 5^{pi.} 7^{pol.} di lavoro, quanto se ne potrà avere con 15^{lir.} 7^{sol.} 2^{den.}? Bisogna pure moltiplicar fra loro questi due numeri, ma il prodotto dovendo esser espresso in tese, 15^{lir.} 7^{sol.} 2^{den.} farà da moltipli-

catore. Ecco l' operazione.

	24 ^{tes.}	5 ^{pi.}	7 ^{pol.}	
	15 ^{lit.}	7 ^{sol.}	2 ^{den.}	
	120 ^{tes.}			
	24			
per 3 piedi	7	3 ^{pi.}		
per 2 piedi	5	0		
per 6 poll.	1	1	6 ^{sol.}	
per 1 poll.	0	1	3	
per 5 sol.	6	1	4	9 ^{lin.}
per 1 sol.	1	1	5	9
per 1 sol.	1	1	5	9
per 1 den.	0	1	2	11 $\frac{1}{2}$
	382 ^{tes.}	5 ^{pi.}	4 ^{pol.}	2 ^{lin.} $\frac{1}{2}$

I prodotti ottenuti ne' due casi che abbiain considerati sembrano diversi perchè contengono parti dell' unità diversamente divisa. Ma scrivendo queste parti sotto forma di frazione , si otterrà il risultamento unico $382 \frac{11 \frac{1}{2}}{72}$.

121. Bisogna in queste operazioni procurare di decomporre in modo le frazioni dell' unità che le divisioni si faccian sempre per numeri di una sola cifra, affinchè si possano eseguire a mente. In caso contrario si farà uso di prodotti *ausiliari* (n° 96). Ecco un esempio de' più complicati.

	47 ^{dec.}	54 ^{gr.}	
	3 ^{cent.}	53 ^{rot.}	19 ^{nn.}
	143,	72	
per 50 rot.....	23,	77	
per 10 rot.....			4, 75, 4 $\frac{1}{2}$
per 2 rot.....	0,	95,	0 $\frac{5}{12}$
per 1 rot.....	0,	47,	6 $\frac{1}{12}$
per 5 rot.....			1, 42, 7 $\frac{1}{12}$
per 10 once.....	0,	14,	2 $\frac{11}{12}$
per 5 once.....	0,	07,	1 $\frac{11}{12}$
per 2 once.....	0,	02,	10 $\frac{11}{12}$
per 2 once.....	0,	02,	10 $\frac{11}{12}$
	169,	19,	8 $\frac{11}{12}$

Si deve osservare che essendo il ducato diviso in 100 grani, si può considerare il moltiplicando come incompleso; quindi si farà immediatamente il prodotto di 47,54 per 3. Quantunque i 53 rotoli sieno parti decimali del cantajo, non conviene moltiplicare 47,54 per 3,53, giacchè bisognerebbe staccar quattro cifre decimali dal prodotto, e allora il grano resterebbe diviso in centesimi, mentre s'intende dividerlo in 12 cavalli. Diviso 53 rotoli in $50+2+1$, si ottiene il prodotto per 50 rotoli prendendo la metà del moltiplicando; per aver quello di 2 rotoli bisogna ricorrere al prodotto ausiliario per 10 rotoli. Siccome un rotolo è uguale a once $33\frac{1}{2}$, tre rotoli formano 100 once; è necessario dunque il prodotto ausiliario di 3 rotoli o 100 once, il quale si ottiene sommando i prodotti di 2 rotoli e 1 rotolo. Prendendone la 10^a parte, si ha il prodotto per 10 once; e così pel resto.

Il metodo di *prender in parti* si applica a qualunque caso della moltiplicazione de' numeri complessi; quindi anche a quello del n° 117.

122. Ci rimarrebbe a parlare del caso in cui il moltiplicando e il moltiplicatore sono numeri della stessa natura. Questo caso non si presenta che per le misure lineari. I due fattori debbono esser considerati entrambi come numeri astratti; si possono perciò ridurre a numeri frazionari, e il prodotto sarà anche un numero astratto. Questo prodotto però, rapportandosi ad un'unità dipendente da quella de' due fattori, può esser anche espresso per un numero complesso; ma per far ciò è necessario conoscer la natura di quest'unità; della qual cosa se ne terrà proposito nel Capo IX.

123. Abbiamo già fatto conoscere come in qualunque caso si csegua la divisione di un numero complesso per un numero astratto (n° 116). Or nella divisione dovendo il dividendo esser composto col quoziente come il divisore è composto coll'unità (n° 30), il divisore deve sempre funzionare da numero astratto e il quoziente dev'esser della stessa natura del dividendo. Nella divisione di un numero complesso per un altro, il divisore e il dividendo o sono di specie diversa o della medesima specie. Bisogna dunque mostrare come ciascuno di questi casi si può riportare a quello di un numero complesso per un numero astratto.

Son due le quistioni che corrispondono al primo caso.

Se per es. con 578^{lir.} 13^{sol.} 5^{den.} si è ottenuto 37^{tes.} 2^{pied.} 7^{poll.} 4^{lin.} di un dato lavoro; si può domandare quanto si è pagato per ogni tesa, o pure con 1 lira quanto lavoro può aversi. Nel primo caso è chiaro che se si conoscesse il prezzo di una tesa di lavoro, moltiplicandolo per 37^{tes.} 2^{pied.} 7^{poll.} 4^{lin.}, si dovrebbe avere 578^{lir.} 13^{sol.} 5^{den.}. Si troverà dunque il prezzo di una tesa di lavoro, dividendo 578^{lir.} 13^{sol.} 5^{den.} per 37^{tes.} 2^{pied.} 7^{poll.} 5^{lin.}. Il quoziente dev'esser in lire, e perciò il divisore deve ridursi a numero astratto. Questo divisore, messo sotto forma di frazione, diverrà $\frac{37 \times 3 \times 4}{5 \times 6} = \frac{599}{5}$. Sicchè moltiplicando prima il dividendo per 16 e poi dividendo per 599, si avrà il quoziente richiesto. Ecco l'operazione.

	578 ^{lir.} 13 ^{sol.} 5 ^{den.}	
	16	
	3468 ^{lir.}	
	578	
per 10 sol.	8	
per 2 sol.	1 12 ^{sol.}	
per 1 sol.	0 16	
per 4 den.	0 5 4 ^{den.}	
per 1 den.	0 1 4	
	9258 ^{lir.} 14 ^{sol.} 8 ^{den.}	
	3268	
Resto in lire.	273	
	20	
	5460	
	14	
	5474 ^{sol.}	
Resto in sol.	83	
	12	
	166	
	85	
	8	
	1004 ^{den.}	
Resto in den.	405	

	599	
	15 ^{lir.} 9 ^{sol.} 1 ^{den.} $\frac{4 \times 5}{599}$	

Perciò il costo di una tesa sarà 15^{lir.} 9^{sol.} 1^{den.} $\frac{4 \times 5}{599}$.

Quando poi con gli stessi dati si domanda quanto lavoro

può averli con 1 lira, bisogna divider $37^{\text{tes.}} 2^{\text{pied.}} 7^{\text{pol.}} 5^{\text{lin.}}$ per $578^{\text{lin.}} 13^{\text{sol.}} 5^{\text{den.}}$. Operando come sopra, si ha per quoziente $4^{\text{pol.}} 7^{\text{lin.}} \frac{224345}{1121725}$.

124. Se il divisore è della stessa natura del dividendo, il quoziente può esser numero astratto o numero complesso di natura diversa. Nell'uno e nell'altro caso si ridurranno il divisore ed il dividendo ad unità dell'infima specie, ed in questo stato riportandosi essi alla stessa unità, si potranno considerare come numeri astratti; giacchè il nome o la grandezza dell'unità non influisce sul valore del quoziente (n° 38, 46). Con questa riduzione l'operazione è riportata ad una divisione ordinaria fra due numeri interi. Il quoziente, secondo richiede la quistione, o si lascerà sotto la forma di numero astratto, o si convertirà in numero complesso dandogli il nome che gli compete ed esprimendo la frazione che lo accompagna in frazioni di una specie data.

Sia proposto il quesito seguente. È necessario l'acquisto di $378^{\text{con.}} 7^{\text{pal.}} 5^{\text{onc.}}$ di tela; ogni pezza forma $8^{\text{c.}} 2^{\text{p.}} 5^{\text{onc.}} 3^{\text{m.}}$; si vuol sapere quante pezze bisogna prendere. Evidentemente si tratterà di dividere il primo numero pel secondo; e il quoziente, esprimendo il numero delle pezze necessarie a formare il numero di canne richiesto, sarà numero

astratto. Si riducono i due numeri a minuti, $181885 \left| \begin{array}{r} 3988 \\ 22365 \\ 45 \end{array} \right.$ e si avrà 181885 da dividere per 3988. Il quoziente intero è 45; e il residuo è 2425. Quindi bisogneranno pezze 45 e altri $5^{\text{c.}} 0^{\text{p.}} 5^{\text{onc.}}$ al di fuori.

Altra quistione. Una libbra di una data droga costa ducati $2,43\frac{1}{2}$; quante libbre della stessa droga si potranno comprare con due. 375,21? È chiaro che per avere il numero delle libbre richiesto, bisogna vedere di quante quantità eguali a $2,43\frac{1}{2}$ si compone 375,21. Si dovrà dunque dividere 375,21 per $2,43\frac{1}{2}$, o pure (sopprimendo in ciascuno la virgola e moltiplicando per 2) 75042 per 487, che si possono considerare come numeri astratti. Il quoziente astratto $154\frac{44}{1137}$ indica quante volte bisogna ripeter 1 libbra. Ora, poichè il prodotto di 1 libbra per $154\frac{44}{1137}$ è libbre $154\frac{44}{1137}$, si tratterà di convertire la frazione $\frac{44}{1137}$ in parti della libbra, operando secondo il metodo esposto ne' n° 113 e 116.

Si poteva da principio considerare il dividendo 75042 come libbre e dividerlo pel numero astratto 487. Ma allora il cal-

colo avrebbe avuto relazione alla quistione seguente. Con duc. $2,43\frac{1}{2}$ si hanno libbre $375\frac{5}{100}$ di una data droga; quante se ne potranno avere con 1 ducato? Nell'uno e nell'altro caso si ottiene per quoziente complesso $154\frac{1}{2}$ lib. 1^{on}. 0^{dr}. 2^{trap}. 15^{gr}. $\frac{5}{4}\frac{1}{8}\frac{6}{7}$.

Queste due quistioni danno il medesimo risultamento; e in effetti non differiscono fra loro, se non perchè nella prima il quoziente corrisponde al moltiplicatore, nella seconda al moltiplicando; e abbiamo già veduto (n° 120) che anche nella moltiplicazione de' numeri complessi si può invertire l'ordine de' fattori purchè il prodotto sia espresso in numero incompleso, come in questo caso è il dividendo.

Altra quistione. Per 7^{can}. 3^{pal}. 3^{inc}. 4^m. di un dato lavoro si è pagato 1 ducato; quanto dovrà pagarsi per 313^c. 3^r. 2^{onc}. 2^m.? Riducendo i due numeri dati a minuti, si tratterà di dividere 150432 per 3559. Il quoziente sarà duc. $42,26\frac{2066}{1119}$.



CAPO V.

DELLA RIPROVA DELLE QUATTRO OPERAZIONI.

125. Nell'effettuare le quattro operazioni su i numeri, eseguendosi a mente una buona parte del calcolo necessario; è facile commettere degli errori. Per assicurarsi se il risultamento ottenuto è esatto, conviene eseguire un'altra operazione che ne sia la prova. È condizione essenziale però che questa seconda operazione sia più facile della prima, altrimenti si cadrà nel dubbio se l'errore è dell'operazione principale o della pruova.

Si può riveder l'addizione, ripetendola con altro ordine. Se per es. la prima volta si è eseguita sommando da sopra verso sotto, si potrà rifare andando da sotto verso sopra: sarà difficile allora incorrere nel medesimo equivoco. Si può anche, se i numeri sono molti, dividerli in diverse somme di quattro o cinque numeri l'una. Conviene anzi adottare fin da principio questo partito per non stancar la memoria.

La migliore prova dell'addizione è quella di andar togliendo dalla somma ottenuta le diverse somme parziali di cui essa si compone, cominciando dall'unità dell'ordine il più elevato. Se l'operazione è ben fatta, si deve avere per ultimo resto zero.

Nell'esempio qui annesso, si fa la somma delle migliaia che è 12, e siccome vi sono scritte 14 migliaia, da 14 si toglie 12 e si nota il resto 2 al di sotto. Questo resto si unisce come diecine alla cifra seguente, e si formano 29 centinaja. La somma delle centinaja è 27, che tolto da 29 dà per resto 2; si nota 2 al di sotto, e unito come decine alla cifra seguente si forma il numero 28. Sommata la colonna seguente ossia quella delle diecine, si ha 27, che tolto da 28 dà per resto 1. Unito l'1 alla cifra seguente si forma 17. Sommate le unità si ha pure 17; sicchè il resto è zero, e l'operazione è ben fatta.

È facile estender questa prova anche a numeri complessi.

126. La riprova della sottrazione si fa facilmente, giacchè sommando il numero inferiore col resto si deve avere il numero più grande (n° 13).

127. La riprova della moltiplicazione si può fare dividendo

il prodotto per uno de' fattori; se l'operazione è ben fatta, si deve aver per quoziente l'altro fattore. Parimenti la prova della divisione si fa moltiplicando il quoziente pel divisore, e a questo prodotto aggiungendo il resto si deve avere il dividendo. Ma queste prove mancherebbero della condizione accennata al n° 125. Bisogna dunque ricorrere ad un mezzo più semplice.

Per verificare la moltiplicazione, si potrà cambiare l'ordine de' fattori; o pure si moltiplicheranno i fattori stessi per de' numeri arbitrari, per es. uno per 2, l'altro per 3; il nuovo prodotto diviso per 6 dovrà essere eguale al prodotto prima ottenuto.

Parimenti si può verificare la divisione moltiplicando il divisore e il dividendo per un medesimo numero; e ripetendo l'operazione, si dee trovare lo stesso quoziente.

128. Ma pe' numeri interi o decimali si può ricorrere per la moltiplicazione ad una prova che è la più spedita. Si divide ciascun fattore per un numero qualunque, per es. per 7, e si notino i resti; si faccia il prodotto di questi resti, e si divida pure per 7; il resto di quest'ultima divisione dev'esser uguale al resto che dà il prodotto totale diviso per 7 (n° 67).

L'operazione si dispone nel seguente modo.

$$\begin{array}{r}
 5431 \\
 \quad 12 \\
 \hline
 10662 \\
 27155 \\
 \hline
 282412
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6 \mid 4 \\
 \hline
 3 \mid 4
 \end{array}$$

Si segna una croce; si divide il primo fattore per un numero qualunque, per es. per 7, e si nota il resto 6 nel primo luogo; si divide l'altro fattore per 7, e si nota il resto 3; si fa il prodotto de' due resti 6 e 3, il quale diviso per 7 dà per resto 4, che si nota in terzo luogo; se l'operazione è ben fatta, il prodotto diviso per 7 deve dare per resto 4.

Fra i numeri da scegliersi per divisori, bisogna rigettare il 2, e il 5; giacchè i resti non dipendono che dalla sola ultima cifra (n° 68), la prova sarebbe di niun conto. Converrà però preferire il 9, perchè il resto si ha togliendo i 9 dalla

somma delle cifre (n° 69). Ripetendo la prova col 9 nell' esempio di sopra, si hanno subito i resti 4, 7, 1. Questa chiamasi la prova del 9. Essa non è interamente sicura, giacchè trasponendo le cifre di un numero, scrivendo degli zeri in vece di 9, o 9 in vece di zero, si ha lo stesso resto; per conseguenza può il prodotto esser erroneo e la regola non annunziarlo. Ma degli errori che si compensino in tal modo sono così difficili ad aver luogo, che veramente si può far uso della regola con tutta la confidenza. D' altronde il solo numero 9 è quello che riunisce alla massima brevità dell' operazione una grande sicurezza.

Se la prova annunzia di essersi sbagliato, si può ripeterla sopra ciascun prodotto parziale per vedere quale di questi è erroneo.

129. Facendo uso del numero 11, il quale dà il resto sottraendo dalla somma delle cifre di posto impari quella delle cifre di posto pari (n° 72), si ha maggior sicurezza, ma l' operazione è più lunga.

Qualunque sia il numero che si scelga, non si può mai con questa pruova esser pienamente sicuri di non aver errato. Imperocchè, trattandosi di trovar il resto e non il quoziente, un numero, anche sotto date condizioni, può variare di moltissime maniere e dar sempre il medesimo resto. Supponiamo che si scelga il 7, e che si operi per trovare il resto secondo è stato prescritto al n° 70. Il periodo de' resti che dà 7 è 5, 4, 6, 2, 3, 1. Or è chiaro che tutte le cifre del numero dato corrispondenti alla medesima cifra del periodo, per es. al 3, si potranno invertire o variar comunque di valore, purchè diano sempre la medesima somma; e parimenti la somma delle cifre che corrispondono al 3 si potrà aumentare di una certa quantità purchè di altrettanto si accrescano quelle corrispondenti al 4, o al contrario. Lo stesso potendosi fare per tutte le altre cifre del periodo, si vede che un numero si può cangiare in infiniti modi, e ottenerne sempre il medesimo resto. Per es. il numero dato sia 57348625834; scrivendovi al di sotto il periodo de' resti, nel modo praticato al n° 70, e guardando nel numero quì scritto le cifre corrispondenti a' medesimi resti,

$$\begin{array}{r} 57348625834 \\ 46231546231 \end{array}$$

sarà facile conoscere, che si avrà lo stesso resto da' numeri 25844657338, 57373720904, ec., e da moltissimi altri.

130. È facile applicare la regola del 9 alla divisione. Il se-

guente esempio potrà servire di norma.

$$\begin{array}{r}
 394789 \quad | \quad 534 \quad \frac{3}{1} \frac{3}{3} \\
 2098 \quad | \quad 739 \\
 4969 \\
 163
 \end{array}$$

Si sommano le cifre del divisore, si tolgono i 9 e si nota il resto 3; si fa lo stesso col quoziente; si fa il prodotto de' due resti 3 e 1, che è 3. Poi dalla somma delle cifre del dividendo togliendo i 9 e le cifre del resto della divisione, se l'operazione è ben fatta, si deve avere per resto 3.



C A P O VI.

DE' DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.

131. Se in un numero complesso le suddivisioni dell'unità principale seguissero un sistema uniforme, tanto la loro riduzione ad unità dell'infima specie, che le operazioni sarebbero più facili. Supponiamo per es. che la libbra fosse divisa in 8 once, l'oncia in 8 dramme, la dramma in 8 trappesi, il trappeso in 8 acini; il numero 3^{lib.} 4^{on.} 7^{dr.} 5^{tr.} 2^{ac.} si ridurrebbe ad unità dell'infima specie con una operazione uniforme, cioè moltiplicando la prima cifra a sinistra per 8 e poi aggiungendo la cifra seguente; moltiplicando questa somma per 8 e aggiungendo la terza cifra; e così moltiplicando sempre per 8 e aggiungendo la cifra che segue, si riduce quel numero a 14826 acini. Parimenti se si avesse il numero 8398 acini e si volesse convertire in numero complesso, bisognerebbe eseguire l'operazione del n° 110; dividendo però sempre per 8; e si avrebbe il numero complesso 2^{lib.} 6^{on.} 3^{dr.} 1^{tr.} 6^{ac.}

Or se si stabilisse che le cifre acquistassero un valore otto volte più grande a misura che si trovano avanzate di un posto verso la sinistra, in vece di dieci volte come è l'attuale sistema di numerazione, il numero complesso 3^{lib.} 4^{on.} 7^{dr.} 5^{tr.} 2^{ac.} per rappresentare unità dell'infima specie si potrebbe scrivere (34752); del pari che 3^{migliaia} 7^{centinaia} 2^{dec.} 4^{unità} si esprimono per mezzo di 3724 unità. Lasciando adunque i nomi particolari delle misure, l'ordine dell'unità sarà indicato dal posto delle cifre. Quindi nel numero (75426), la prima cifra a destra indica unità semplici; la seconda rappresenta collezioni di unità otto volte più grandi della prima o di second'ordine; la terza cifra, unità otto volte più grandi della precedente, ovvero unità di terz'ordine; e così di seguito. È chiaro in questo caso che il numero 8, formando un'unità di second'ordine, sarà rappresentato dall'unità scritta al secondo posto cioè da (10). Perciò i caratteri necessari per scrivere tutt' i numeri in questo sistema sono 8 solamente, cioè 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; e questo numero è la base del sistema. Così 10 è la base del sistema ordinario di numerazione, perchè vi bisognano 10 caratteri per scrivere tutt' i numeri possibili. Parimenti convenendo che il valore delle cifre divenisse di 12 in 12 volte più grande per ogni posto che queste avanzano verso la sinistra, vi bisognerebbero 12 caratteri per scrivere tutti i numeri possibili, cioè i primi dieci conosciuti e due altri nuovi per rappresentare 10 e 11. Per far uso di questo sistema negli esempi, dinoteremo queste due altre cifre per α e β .

Il numero (34752) base 8 non è che il numero complesso di una specie data 3, 4, 7, 5, 2, in cui si prende per unità principale quella dell'infima specie. Riducendo questo numero ad unità dell'infima specie, si ha 14826. I due numeri (34752) e 14826 son dunque eguali, e si rapportano ad unità della stessa grandezza, ma l'uno è scritto nel sistema a base 8, l'altro nel sistema ordinario.

Da ciò risulta, che per scrivere nel sistema ordinario un numero che

si trova scritto in un altro sistema o viceversa, bisogna eseguire la stessa operazione che si farebbe sopra un numero complesso, o per ridurlo ad unità dell'infima specie, o per ripassare dalle unità dell'infima specie alle unità de' diversi ordini (n° 110).

Dunque per tradurre un numero dal sistema decimale ad un altro sistema bisogna divider questo numero per la nuova base, poi il quoziente per la stessa base, e il nuovo quoziente per la base, e così continuare fino a che si arrivi a un quoziente minore della base. I resti, scritti da destra verso sinistra secondo l'ordine ottenuti e seguiti dall'ultimo quoziente, formeranno il numero richiesto.

Si voglia per es. tradurre il numero 5953 in un altro a base 6. Ecco il quadro delle operazioni.

$$\begin{array}{r|l}
 5953 & 6 \\
 55 & 992 \\
 13 & 39 \\
 1 & 32 \\
 & 2
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 6 & 165 \\
 & 45 \\
 & 3
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 6 & 27 \\
 & 3
 \end{array}
 \begin{array}{r|l}
 6 & 4
 \end{array}$$

Sicchè sarà $5953 = (43321) \text{ base } 6$.

Parimenti si trova

$$1374 = (20444) \text{ base } 5,$$

$$137895 = (21000011020) \text{ base } 3,$$

$$17543 = (12129) \text{ base } 11.$$

Viceversa, se un numero scritto in un sistema qualunque si vuol tradurre nel sistema decimale, si moltiplicherà la prima cifra (a sinistra) per la base, e si aggiungerà la cifra seguente; questa somma si moltiplicherà nuovamente per la base, e si aggiungerà l'altra cifra; e così si continuerà finchè all'ultimo prodotto si aggiunga l'ultima cifra.

Quando la base del sistema è di una sola cifra, l'operazione del n° 110 riesce più semplice; giacchè scritto una sola volta il moltiplicatore, si possono senza stento trovare i prodotti successivi, avendo cura, mentre si fa la moltiplicazione, di aumentarli del valor della cifra che segue quella già adoperata. L'annesso esempio, nel quale trattasi di tradurre nel sistema ordinario il numero $(63504) \text{ base } 7$, e le indicazioni poste a lato mostrano abbastanza come bisogna in simili casi regolarsi. Fatta l'operazione, si ottiene $(63504) \text{ base } 7 = 14984$.

Così pure si ha

$$(57326) \text{ base } 8 = 24278,$$

$$(3660482) \text{ base } 9 = 1988381,$$

$$(4729305) \text{ base } 12 = 13910261.$$

$$\begin{array}{rcl}
 63504 & & \\
 7 & & \\
 \hline
 45 & = & 6 \times 7 + 3 \\
 320 & = & 45 \times 7 + 5 \\
 2140 & = & 320 \times 7 + 0 \\
 14984 & = & 2140 \times 7 + 4
 \end{array}$$

Risulta dalla natura di queste operazioni che quanto più grande è la base del sistema tanto minore è il numero delle cifre che bisogna impiegare per rappresentare un numero dato.

In tutto ciò che avremo a dire in seguito faremo sempre uso de' numeri rapportati alla base 8.

132. Si moltiplica un numero per la base, aggiungendo un zero alla sua destra. Il numero (3754) moltiplicato per otto, cioè per (10) è uguale a (37540). Moltiplicando nuovamente per otto, si ha (375400); e così di seguito. Stando alla convenzione di separar con una virgola le parti minori dell'unità, il numero stesso diviso per la base è uguale a (375,4). E diviso nuovamente per la base, darà (37,54). Segue da ciò, che qualunque sia la base del sistema, un numero si moltiplica o si divide per la base trasportando la virgola o da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra.

133. I principii generale su i quali sono fondate le quattro operazioni, essendo indipendenti dalla base del sistema di numerazione, potranno essere applicati ad un sistema che non differisce dal decimale che per la base. Questa applicazione riuscirà ancora più facile, ravvicinando i metodi dati pel sistema decimale e pe' numeri complessi, e osservando come i principii esposti pel sistema decimale si sono estesi a un sistema in cui le suddivisioni dell'unità non seguono una legge costante, e che perciò deve riguardarsi come più difficile di quello in cui i numeri sono scritti in una base diversa da 10.

Ecco alcuni esempi di addizione.

37543	54311
2650	77700
31422	273
20045	36220
<u>114102</u>	<u>212724</u>

Esempi di sottrazione.

27434	500004	100000
12776	254777	35426
<u>12436</u>	<u>223005</u>	<u>42352</u>

La moltiplicazione si fa come nel sistema decimale, avvertendo però ne' prodotti parziali di riportare al prodotto seguente tutte le unità di second' ordine che vi si contengono, le quali nel caso attuale sono composte di otto unità di prim' ordine.

Ecco alcuni esempi.

$$\begin{array}{r}
 375426 \\
 376 \\
 \hline
 3761204 \\
 3356732 \\
 \hline
 1370502 \\
 \hline
 170620724
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 734,26 \\
 5,372 \\
 \hline
 167054 \\
 640632 \\
 \hline
 262502 \\
 \hline
 451556 \\
 \hline
 5066,23574
 \end{array}$$

Il seguente esempio potrà servir di norma per la divisione.

$$\begin{array}{r}
 40543'2'0'7' \\
 34502 \\
 \hline
 30412' \\
 27550 \\
 \hline
 6420' \\
 5732 \\
 \hline
 4667'0' \\
 43434 \\
 \hline
 32340' \\
 27550 \\
 \hline
 25700' \\
 21616 \\
 \hline
 4062
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 5732 \\
 \hline
 5410,643....
 \end{array} \right.$$

134. La difficoltà che si sperimenta tanto nel leggere che nel far le operazioni sopra i numeri scritti con un'altra base dipende da che il linguaggio non si trova in corrispondenza col sistema di numerazione. Imperocchè le operazioni di composizione e decomposizione, che si eseguono su i numeri combinando fra loro le diverse cifre che li rappresentano, alcune possono ridursi a regole pratiche e sono quelle che risultano da principii generali, indipendenti o dalla base del sistema o dal sistema stesso; altre le esegue la mente, e sono strettamente dipendenti dal valore che le cifre ricevono dal posto che occupano. Considerando per es. la moltiplicazione, si vedrà, che dipende da un principio generale la regola di ripeter separatamente ciascuna delle parti del moltiplicando tante volte per quante unità contiene il moltiplicatore; che dipende dal sistema di numerazione la regola che quando le unità del moltiplicatore si trovano scritte sotto la prima cifra (a sinistra) del moltiplicando, si debbono scrivere i prodotti parziali in modo che la prima cifra di ciascuno occupi lo stesso posto della corrispondente cifra del moltiplicatore; e dipende dalla base 10 il saper ne' prodotti di una cifra per un'altra ricavar le unità di second'ordine. Allorchè dunque il linguaggio o manca o non si trova in corrispondenza col sistema di numerazione, le operazioni debbono riuscir grandemente più difficili.

Il pregio dell'attuale sistema non risiede nella scelta della base, ma

nel principio che ogni cifra ha due valori uno assoluto l'altro di posizione; il che permette di poter con tanta facilità combinar le cifre fra loro (*).

Le condizioni principali alle quali dovrebbe soddisfare la base per presentare il massimo numero di vantaggi sono le seguenti: 1° che non fosse troppo piccola, per evitar l'inconveniente di dover impiegar molti caratteri per rappresentare un numero; 2° che non fosse molto estesa, perchè difficile a concepirsi; 3° che contenesse il maggior numero di

(*) Questo sistema ci è stato tramandato dagli Arabi insieme colle cifre di cui facciamo uso, e che perciò son dette Arabe.

I Romani ed i Greci quantunque avessero una numerazione parlata uguale alla nostra, avevano un sistema di scrivere i numeri diversissimo ed assai male immaginato; giacchè impiegavan le lettere, e sempre col medesimo valore assoluto.

I Romani facevan uso delle sole lettere C, I, L, V, X, e rappresentavano i numeri così:

Cifre Romane. I, V, X, L, C, IO, CIO, IIO, CCIO, IIOO, CCCIOO.

Valori corrisp. 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000, 100000.

I medesimi caratteri servivano per rappresentare tutti i numeri intermedi, scrivendoli l'uno dopo l'altro secondo l'ordine di grandezza. Ma per numeri fino al C 100 seguivasi il sistema di sommare o sottrarre il valore assoluto di due cifre poste a contatto, secondochè la cifra di minor valore si trovava a destra o a sinistra di quella di maggior valore. Perciò si scriveva

Numeri Rom. IV, VI, IX, XI, XL, LX, XC, CX.

Val. corrisp. 4, 6, 9, 11, 40, 60, 90, 110.

Il sistema d'impiegar le cifre per sottrazione non si estendeva che su quelle appartenenti ad un ordine immediatamente inferiore, e non si mettevano in relazione che le cifre appartenenti a due ordini consecutivi, considerando la successione degli ordini secondo il sistema di numerazione parlata. Perciò si scriveva XCIX e non IC per indicar 99, XLV e non VL per indicar 45. Parimenti avendosi LIX, l'I si metteva in relazione con X e non con L; per cui quel numero rappresenta 59 e non 61. Il numero 7864 secondo questo sistema si scrive IOO-CIO-CIO-IO-CCCLXIV.

Nel considerar la numerazione parlata de' Latini si è preteso che i Romani contassero fino a 100000. Ma è chiaro che partendo da CIO e stabilendo che questo numero divenga decuplo per ogni coppia di C che vi si aggiungono, e che il suo valore si debba prender per metà allorchè si sopprimono le C a sinistra, si vede che è possibile con questo sistema rappresentare qualunque numero. Perciò un milione si scrive CCCCIOOOO e 500000 IOOOO; e così di seguito.

Ma dopo il C 100 il sistema ha sofferto qualche variazione, giacchè al IO fa sostituito un D e al CIO un M. Le lettere V, X, L, C, D, M segnate al di sopra con una linea acquistavano un valore 1000 volte più grande. Perciò si scriveva $\bar{V}$ per 5000, $\bar{X}$ per 10000, $\bar{M}$ per rappresentare un milione.

Vi ha pure chi pretende che 5000 si scrivesse VM, 10000 XM, ec., nel qual caso le cifre di valor più piccolo servirebbero di moltiplicatore.

I Greci avevano due sistemi di numerazione scritta. In uno si servivano delle lettere majuscole; e il modo di scrivere non differiva da quello de' Romani se non perchè le cifre erano impiegate sempre per addizione.

divisori, per poter trasportare il sistema di numerazione alle misure di cui si fa uso ne' bisogni ordinari della società.

Si commenda la base 10 come quella che senza esser molto piccola

Caratteri Greci	Valore corrisp.
I	1
II Πέντε (pente)	5
Δ Δέκα (deca)	10
ΙΔΙ	50
Η Ηξάκοντ (ecaton)	100
ΙΗΙ	500
Χ Χίλια (chilia)	1000
ΙΧΙ	5000
Μ Μύρια (miria)	10000

Pe' numeri intermedi si ripetevano le medesime cifre, finchè col loro valore assolute formassero il numero dato. Perciò si scriveva:

Numeri Greci. ΙΙΙ, ΔΠΠ, ΙΗΙΗΗΔΠ; ΜΙΧΙΗΗΙ, ec.

Valori corrisp. 4, 17, 712, 15201

L'altro sistema di numerazione scritta era fondato sul modo di contare per unità, per diecine, per centinaja, ec.; sicchè s'impiegavano le lettere dell'alfabeto per rappresentare prima i primi nove numeri, poi le nove diecine, poi le 9 centinaja. Le medesime lettere con un accento al di sotto acquistavano un valore 1000 volte più grande.

Unità	Diecine	Centinaja	Migliaja
α 1	ι 10	ρ 100	α, 1000
β 2	κ 20	σ 200	β, 2000
γ 3	λ 30	τ 300	γ, 3000
δ 4	μ 40	υ 400	δ, 4000
ε 5	ν 50	φ 500	ε, 5000
ς 6	ξ 60	χ 600	ς, 6000
ζ 7	ο 70	ψ 700	ζ, 7000
η 8	π 80	ω 800	η, 8000
θ 9	ϋ 90	η 900	θ, 9000

Si scrivevano queste cifre senza alcun ordine, e per leggere un numero conveniva fare un'addizione. Perciò

$$\mu\omega\alpha\gamma\alpha = 40 + 800 + 1000 + 3 + 1 = 1844.$$

Questi sistemi, oltre la difficoltà che presentano per combinar le cifre fra loro, hanno il difetto di non potersi estendere per rappresentar tutt' i numeri possibili, e di non poter esser impiegati a rappresentare parti minori dell' unità.

si trova meglio proporzionata all' intelligenza comune (*). Sia pur così: ma non può negarsi al sistema decimale il difetto di contenere nella sua scala i soli divisori 2 e 5. La qual circostanza ha dovuto rimover gli animi dall' adottare la divisione decimale nelle misure, ove richiedevansi divisori più convenienti all' uso cui erano destinate. Da ciò l' origine de' numeri complessi (**).

(*) Si pretende, e forse a ragione, che il sistema decimale si trovi stabilito da che gli uomini nel confuciare a contare hanno fatto uso delle dita per punti di richiamo. La corrispondenza nel modo di contare fra diverse nazioni n' è una pruova. Il sistema di numerazione de' Romani convalida maggiormente questa opinione; giacchè la seconda cifra ha un valore quintuplo della prima, la terza doppio della seconda, e così continuando, sempre una ha un valore quintuplo e l'altra doppio della precedente; il che significa che prima si contava fino a 5 con una mano, e poi sino a dieci impiegando l'altra mano, ossia raddoppiando il primo numero.

(**) La diversità fra le misure e il sistema di numerazione è sorgente perenne di due gravi inconvenienti. 1° Essendosi complicata l' Aritmetica commerciale, un minor numero di uomini si trova a portata d' imparare a calcolare per le comuni occorrenze; 2° Riuscendo più profissi i calcoli, vien tolto al calcolatore un tempo tanto più prezioso quanto più estese sono le relazioni commerciali e più avanzate le umane conoscenze.

Un cambiamento nel sistema di numerazione, richiedendo un cambiamento nel linguaggio, si deve riguardare come impossibile. Il vano tentativo fatto in Francia per cambiare il sistema di misure è una pruova della difficoltà che s'incontra nell' indurre gli uomini a rinunciare alle abitudini contratte fin dall' infanzia. Perciò il sistema decimale introdotto o per caso o per le dita delle mani, ha privato il genere umano del vantaggio che potea risultare dalla corrispondenza tra le misure e il sistema di numerazione, corrispondenza che dovea necessariamente aver luogo in un sistema più proprio a soddisfare a' comuni bisogni.

C A P O VII.

OSSERVAZIONI SULLA MOLTIPLICAZIONE, SULLA DIVISIONE, E SULLE FRAZIONI. CALCOLO PER APPROSSIMAZIONE.

135. Abbiám veduto (n° 52) che quando un numero non è esattamente divisibile per un altro, si può ottenere il quoziente con quella approssimazione che si desidera, prolungando la divisione per mezzo de' decimali. Avvien di rado che si abbia bisogno di aver de' numeri seguiti da molte cifre decimali, giacchè le ultime cifre esprimendo parti di unità molto piccole, negli usi ordinari sono assolutamente trascurabili. Supponiamo per es. che il numero 37,54726 esprima palmi, è chiaro che le due o tre ultime cifre possono risultare inutili negli usi ordinari, essendo impossibile tener conto delle parti millesime del palmo nel prender le misure; e le parti diecimillesime o centomillesime sono tante piccole che non si possono tampoco concepire.

Quando dunque si debbono trascurare le ultime cifre di un numero che contiene decimali, si costuma di aumentare di un' unità l' ultima delle cifre che restano, quando quelle che si trascurano formano più di una mezza unità dell' ordine infimo di quelle che si conservano, ossia quando la prima delle cifre trascurate è maggiore di 5. Supponiamo per es. che il numero 3,75832 si debba adoperare con due sole decimali, si cancelleranno le ultime tre cifre, e si aumenterà di un' unità l' ultima delle cifre rimaste, e si avrà 3,76. In effetti quel numero è compreso fra 3,75 e 3,76; ma siccome è più vicino a quest' ultimo che all' altro, l' errore che può provenire dalle cifre trascurate è minore quando si ritiene il numero 3,76. Al contrario pel numero 2,5834, trascurando le due ultime cifre si riterrà lo stesso numero 2,58. Il primo è approssimato per *eccesso*, il secondo per *difetto*.

Si debbono nondimeno cancellare da un numero le cifre decimali inutili, quando questo sia il risultamento finale di una operazione qualunque; giacchè se su quel numero si dovessero eseguire delle moltiplicazioni o delle divisioni, le cifre trascurate potrebbero influire grandemente sul valore del prodotto o del quoziente, come or ora faremo vedere.

136. Nel moltiplicare due numeri che contengono cifre decimali, il

prodotto ha tante cifre decimali per quante se ne contengono ne' due fattori. Or quando nel prodotto non bisognano tutte le cifre decimali, si può render più breve l'operazione, prendendo i prodotti parziali con tante cifre decimali quante se ne cercano nel prodotto totale. Sia per es. da moltiplicarsi 57,358475 per 74,985, e si voglia il prodotto con sole tre cifre decimali. In vece di avere il prodotto totale e cancellare le ultime sei cifre, si possono fin da principio conservar ne' prodotti parziali le sole cifre che bisognano. Gioverà in tal caso cominciare la moltiplicazione dalla sinistra del moltiplicatore, e cominciare i prodotti parziali da quella cifra del moltiplicando che dà nel prodotto unità dell'ordine da conservarsi. È necessario però calcoler nel prodotto una cifra di più di quelle che si cercano, giacchè l'ultima cifra del prodotto così ottenuto non può esser mai esatta a causa di ciò che si riporterebbe dalla colonna precedente che non è scritta. Nel caso attuale adunque bisogna ottenere il prodotto con quattro decimali per conservarne tre solamente. Fa d'uopo inoltre per maggior esattezza aggiungere alla prima cifra di ogni prodotto parziale ciò che si riporterebbe dal prodotto della precedente cifra trascurata, avvertendo anche di prender questa parte da aggiungersi ora in eccesso ora in difetto secondo la regola assegnata (n° prec.). La sola difficoltà sta nel determinare la cifra del moltiplicando dalla quale deve cominciare il prodotto parziale della prima cifra del moltiplicatore a sinistra; giacchè per gli altri prodotti, ciascuno dovrà cominciare nel moltiplicando dalla cifra a sinistra di quella da cui si è cominciato il precedente. Si toglie subito questa difficoltà riducendo il denominatore a non aver che una sola cifra dal lato degl' interi. Quindi i due numeri dati si convertiranno in 573,58475 e 7,4985. Siccome il prodotto del moltiplicando per la cifra delle unità del moltiplicatore deve dare nel prodotto unità dello stesso ordine di quelle del moltiplicando, volendosi nel prodotto sole quattro cifre decimali, il primo prodotto parziale comincerà dalla quarta decimale del moltiplicando, cioè dalla cifra 7; il prodotto per 9 comincerà dalla cifra 4 a sinistra della precedente; il prodotto per 8 comincerà dalla cifra 8 a sinistra di 4; e così di seguito. Ogni prodotto parziale così ottenuto si comincerà a scriver sempre sotto la prima cifra a destra del primo prodotto parziale; siccome si vede nell'esempio che segue.

573,58475	
<u>7,4985</u>	
4015,0932	prodotto per 7 aumentato di 3
229,4339	 4 3
51,6226	 9 4
4,5886	 8 6
<u>2167</u>	 5 2
4301,025	

Ciascun prodotto si trova aumentato di ciò che si riporterebbe dal prodotto della cifra precedente. Quello scritto nella seconda linea che comincia dalla terza cifra del moltiplicando si trova aumentato di 3, perchè il prodotto per la cifra precedente a quella da cui s'incomincia è 28

che è più vicino a 30 che a 20. Prendendo i prodotti parziali ora per eccesso ora per difetto, si produce un tale compenso che l'errore proveniente delle cifre trascurate non può mai influire sulla seconda cifra del prodotto totale.

Ecco un altro esempio, in cui si cerca il prodotto con quattro cifre decimali esatte.

$$\begin{array}{r}
 3695,427 \\
 7,5489 \\
 \hline
 52867,989 \\
 1847,7135 \\
 147,81708 \\
 29,56342 \\
 3,32588 \\
 \hline
 54896,4089
 \end{array}$$

Per non cadere in equivoco sulla cifra del moltiplicando da cui deve cominciarsi ogni prodotto parziale, si potrà seguire con un punto la cifra da cui si è cominciato il prodotto parziale precedente.

Si potrebbe ancora scrivere la cifra delle unità del moltiplicatore sotto la cifra del moltiplicando da cui deve cominciare il primo prodotto parziale, e scriver poi le altre cifre in ordine inverso, secondo la disposizione che si vede a fianco data ai fattori del primo esempio; ogni cifra di esso si troverà scritta in corrispondenza di quella del moltiplicando da cui deve cominciarsi il prodotto parziale.

$$\begin{array}{r}
 573,58475 \\
 5,8947 \\
 \hline
 \end{array}$$

137. Questo modo di operare nella moltiplicazione non solo è utile quando nel prodotto non sono necessarie le ultime cifre decimali, ma anche quando i fattori dati non sono esatti ma approssimati. Riprendendo nuovamente il primo esempio, si supponga che i numeri dati 57,358475 e 74,985 non sieno esatti ma approssimati. Ciascuno di essi potrà differire dal vero valore in più o in meno, per circa $\frac{1}{2}$ dell'unità dell'ultimo ordine contenuto in ciascuno. Si faccia per poco astrazione dalla virgola. Se il moltiplicatore fosse $57358475 + \frac{1}{2}$ e il moltiplicatore $74985 + \frac{1}{2}$, il prodotto sarebbe uguale a quattro prodotti (n^o 94) $57358475 \times 74985 + 57358475 \times \frac{1}{2} + 74985 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, sicchè la differenza di questo prodotto da quello di 57358475 per 58947 può esser nel caso più sfavorevole quanto la semisomma de' due fattori, la quale ha tante cifre quante ne contiene il numero più grande o una di meno. In questo esempio il prodotto totale ha 13 cifre (n^o 29), il moltiplicando ne ha 8; dunque le ultime otto cifre non vengono esatte, per cui è inutile trovarle.

Se un solo de' fattori fosse approssimato, sarà facile conoscere, che il numero delle ultime cifre erronee del prodotto può esser quanto quelle di cui si comporrebbe il fattore esatto diviso per 2. Nel secondo esempio il prodotto totale ha 12 cifre; supponiamo che il solo moltiplicando sia approssimato; siccome il moltiplicatore diviso per 2 ha 5 cifre, non si può contare sull'esattezza delle ultime 5 cifre del pro-

dotto. In questo caso sarebbe inutile trovare il prodotto al di là de' decimali.

138. Allorchè nella moltiplicazione uno de' fattori contiene una frazione decimale periodica, è sempre più breve sostituire ad essa la frazione ordinaria corrispondente. Sia per es. da moltiplicarsi 37583 per 2,6666... Se alla frazione 0,6666... si sostituisce la frazione ordinaria corrispondente $\frac{2}{3}$, si ha subito il prodotto qui sotto notato.

$$\begin{array}{r} 37583 \\ \quad 2 \frac{2}{3} \\ \hline 75166 \\ 12527 \frac{2}{3} \\ 12527 \frac{2}{3} \\ \hline 100221 \frac{2}{3} \end{array}$$

Parimenti se si avesse da far la moltiplicazione di 237,8333... per 5,478; sostituendo $\frac{2}{3}$ alla frazione periodica da cui è seguita la cifra de' decimali, si fa subito l'operazione come qui appresso.

$$\begin{array}{r} 237,8 \frac{2}{3} \\ 5,478 \\ \hline 19024 \\ 16646 \\ 9512 \\ 1189,0 \\ \text{prod. per } \frac{2}{3} \quad 1826 \\ \hline 1302,851 \end{array}$$

139. Non è già che impiegando le frazioni decimali non si potesse pervenire al medesimo risultamento; ma oltre che è necessario regolar l'operazione con qualche avvedutezza per far che tutte le cifre del prodotto risultino esatte, il metodo di cui si deve far uso riesce quasi sempre imbarazzante, e più particolarmente quando il periodo è di più cifre e quando ciascun fattore ha una frazione decimale periodica. Riprendendo il primo esempio, nel quale la frazione periodica si trova al moltiplicatore, per aver il prodotto esatto fa d'uopo scrivere in ogni colonna tutte le cifre che verrebbero, se la frazione decimale si prolungasse all'infinito.

Ecco il quadro dell'operazione che potrà servir di norma in casi simili.

$$\begin{array}{r}
 37583 \\
 2,666... \\
 \hline
 75166 \\
 22549,8 \\
 2254,98 \\
 225,498 \\
 22,549 \\
 2,254 \\
 225 \\
 22 \\
 2 \\
 \hline
 100221,333...
 \end{array}$$

Osservando che le ultime tre colonne sono composte delle medesime cifre e che vi dovrebbero esser infinite di queste colonne, è facile ricavare che il prodotto dev'esser 100221,3333..., ossia $100221\frac{1}{3}$, come sopra.

L'operazione del secondo esempio, lasciando nel moltiplicando la frazione decimale periodica, dev'esser pure fatta colla considerazione che la frazione decimale fosse prolungata all'infinito.

$$\begin{array}{r}
 237,833333... \\
 5,478 \\
 \hline
 1189,166666... \\
 95,133333... \\
 16,648333... \\
 1,902666... \\
 \hline
 1302,851
 \end{array}$$

Questa però dà luogo a molte importanti osservazioni. Primieramente bisogna prender la frazione decimale periodica in modo che rimangano alcune cifre del periodo anche per l'ultimo prodotto parziale. Nel fare il primo prodotto parziale in vece di scrivere per prima cifra 5 conviene scriver 6, perchè, siccome la frazione $0,3333...$ dovrebbe esser prolungata all'infinito, bisogna tener conto della ritenuta che verrebbe dalla cifra seguente che non è scritta: lo stesso si dica per gli altri prodotti. Facendo la somma secondo si trovano scritti i prodotti parziali, si troverebbe 1302,850999... Trasportando la virgola di tre posti verso la destra, si ha il numero 1302850 seguito dalla frazione decimale periodica $0,999...$; ma questa è uguale a 1 (n° 103), perciò il prodotto cercato è uguale a 1302,851. Si può anche pervenire a questo risultamento, osservando che siccome si dovrebbero sommare un'infinità di colonne tutte uguali alle tre ultime, la somma della colonna che non è scritta è 18; riportando 2 alla colonna seguente secondo la regola (n° 136), si ha il vero prodotto.

Da ciò si conchiude che se per alcuni casi può esser preferibile il convertire le frazioni ordinarie in decimali, in altri servirebbe ad allungare considerevolmente l'operazione.

140. Vi è qualche altro caso in cui l'uso delle frazioni ordinarie può esser preferibile alle decimali, ed è quando una frazione decimale si può convertire in una frazione ordinaria molto semplice. Avendosi per es. la frazione decimale 0,25 in uno de' fattori, può riuscir più facile in qualche occasione servirsi delle frazione $\frac{1}{4}$; avendosi 0,125 si può impiegare $\frac{1}{8}$; e così di seguito.

Siccome la moltiplicazione per $\frac{1}{4}$ equivale alla divisione per 4; la moltiplicazione per $\frac{1}{8}$, alla divisione per 8; e in generale ogni moltiplicazione per una frazione che ha per numeratore l'unità corrisponde ad una divisione; si può cambiar la moltiplicazione in divisione sempre che le ultime cifre di un fattore considerate come decimali corrispondono ad una frazione ordinaria molto semplice. Sia per es. da moltiplicarsi 52398 per 3125. Si può il moltiplicatore considerare come 3,125., e siccome $0,125 = \frac{1}{8}$, dopo aver fatto il prodotto per 3, in vece di continuare il prodotto per le altre cifre del moltiplicatore, si divide per 8 il moltiplicando, e il quoziente moltiplicato per 1000 darà il prodotto di 52398 per 125.

$$\begin{array}{r} 52398 \\ 3125 \\ \hline 157194 \\ 6724750 \\ \hline 163918750 \end{array}$$

141. Quando nella divisione è determinato anticipatamente il numero delle cifre che si cercano nel quoziente, questa operazione ammette un compendio analogo a quello usato per la moltiplicazione, cioè in vece di calar le cifre del dividendo, o pure aggiunger degli zeri al residuo, si possono andar sopprimendo le cifre del divisore.

Ecco un esempio.

$$\begin{array}{r|l} 19561749'3'7' & 3\ 573928 \\ 1692109\ 3 & 5,473459 \\ 262538\ 17 & \\ 12363\ 21 & \\ 1641\ 43 & \\ 211\ 86 & \\ 33\ 17 & \end{array}$$

Dopo aver trovate le prime tre cifre del quoziente, in vece di aggiungere un zero al residuo 1236321 si sopprime la prima cifra 8 del divisore, e dividendo questo numero per 359392 si ha 3 nel quoziente.

*

Nel far il prodotto di 357392 per 3 bisogna usare la solita avvertenza di aggiungere a questo prodotto ciò che si riporterebbe dal prodotto della cifra 8 trascurata, preso sempre in più o in meno secondo si è detto al n° 135. Si ottiene il resto 164143; si sopprime un'altra cifra nel divisore, e si divide questo numero per 35739; si ha nel quoziente la cifra 4 e si opera al solito, aggiungendo sempre al prodotto di 35739 per 4 ciò che si riporterebbe dalla cifra a destra che si trascura. Continuando a questo modo, si perviene finalmente al dividendo parziale 3317 che diviso per 357 dà 9 per ultima cifra del quoziente. Non dovendosi più proseguire l'operazione, è inutile scriver l'ultimo resto.

Poichè le prime due o tre cifre del dividendo bastano ordinariamente per decidere quante volte il divisore vi è contenuto, e le cifre che si trascurano nel divisore non influiscono che sulle ultime cifre de' dividendi parziali, specialmente quando ad ogni prodotto si aggiunge la ritenuta proveniente dalla cifra trascurata, si potrà regolare l'operazione in modo da finire con un divisore di due o di tre cifre, secondo che le cifre che nel divisore seguono la prima a sinistra sono rispetto a questa piccole o grandi. In conseguenza avendo determinato da principio quante cifre bisognano nel quoziente, si saprà a quale dividendo parziale si può cominciare a sopprimere le cifre del divisore. Le quali a misura che si trascurano si segnano con un punto, come si vede nell'esempio.

142. Se in una divisione da farsi il divisore è accompagnato da una frazione decimale periodica, bisogna sostituire ad essa la frazione ordinaria corrispondente; giacchè non potendosi impiegare un divisore composto di un numero infinito di cifre, quelle trascurate influiranno necessariamente sul quoziente, il quale non potrebbe perciò avere che un numero limitato di cifre esatte. Per es. dovendosi dividere 37543 per 23,8666..., sostituendo $\frac{2}{3}$ alla frazione decimale periodica si tratterà di dividere 37543 per 23,8 $\frac{2}{3}$, ossia (n° 46, V.) 1126290 per 716; co' quali numeri, per quanto si prolunghi la divisione, si hanno sempre cifre esatte nel quoziente.

Ma se la frazione decimale si trova nel dividendo, e si cerca il quoziente approssimato co' decimali, converrà lasciar di preferenza la frazione decimale periodica, come si vede nell'esempio che segue.

$$\begin{array}{r}
 735'8',5'2'8'888... \quad | \quad 614 \\
 1218 \quad \quad \quad \quad | \quad 11,984 \\
 6045 \\
 5192 \\
 2808 \\
 352
 \end{array}$$

L'operazione può continuarsi all'infinito, aggiungendo al resto sempre la cifra 8. Questo esempio mostra quale grandissimo vantaggio offrono i decimali quando si vogliono esprimere delle quantità per approssimazione.

143. Siccome conviene qualche volta cambiar la moltiplicazione in divisione (n° 140), si potrà pure cambiar la divisione in moltiplicazione; ed è quando il divisore può convertirsi in una frazione ordinaria che abbia per numeratore l'unità. Si debba per es. dividere 2379 per 125. Siccome $0,125 = \frac{1}{8}$, si moltiplicherà 2379 per 8 e si dividerà per 1000, il che darà 19,032. Parimenti 4382 diviso per 5 equivale a 4382×2 diviso per 10; cioè si moltiplica 4382 per 2 e si stacca una cifra decimale, il che dà 876,4.

144. Allorchè il divisore è terminato dalla cifra 5, è utile talvolta moltiplicarlo per 2, e quando è numero pari moltiplicarlo per 5. Ciò conduce ad ottenere in molti casi un divisore più semplice, giacchè la prima cifra o anche più cifre a destra divengono zeri. Per es. si debba dividere 575497 per 7,625; moltiplicando il divisore prima per 2 si ha 15250, poi un'altra volta per 2 si ha 30500; e un'altra volta per 2 si ha 61000; moltiplicando anche il dividendo per 8 e staccando tre cifre decimali si ha 4587,976 da dividersi per 61: divisione assai più semplice della prima. Parimenti si abbia a dividere 375893 per 462; moltiplicando entrambi i numeri per 5 ovvero prendendone la metà, si ha 187946,5 da dividersi per 231.

145. I tentativi da farsi per conoscer quante volte il divisore è contenuto nel dividendo parziale (n° 35) tanto più innanzi debbono spingersi quanto più grandi sono le cifre che seguono la prima a sinistra. Quando la seconda cifra del divisore è piccola o almeno minore di 5, basta ordinariamente la sola prima cifra a sinistra per vedere quante volte il divisore è contenuto nel dividendo parziale. Per questo riguardo conviene qualche volta moltiplicare il divisore per 2, per 3, ec. affinchè si ottenga un divisore che abbia la seconda cifra a sinistra minore di 5. Se per es. si debba dividere 875389 per 17789. Moltiplicando il divisore per 4 si ha 71156; sicchè dividendo 3501556 per 71156 si otterrà più speditamente il quoziente.

146. Nella moltiplicazione, allorchè il moltiplicatore è di una sola cifra, ciascuna cifra del prodotto risulta in generale della somma di tre parti; cioè, dalle unità del prodotto del moltiplicatore per la corrispondente cifra del moltiplicando, dalle decine del prodotto precedente e dalle decine della somma che ha data la cifra precedente. Per es. dovendosi moltiplicare 375834 per 7, la quinta cifra del prodotto sarà composta dalle unità del prodotto 7×7 che è 9, dalle decine del prodotto 5×7 che è 3, e dalle decine che si riportano dalla somma che ha data la cifra precedente, che è 1. E siccome queste somme si fanno facilmente a memoria, si possono scrivere immediatamente tutte le cifre del prodotto.

Allorchè il moltiplicatore è composto di più cifre, la regola prescrive di trovar prima i prodotti del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e poi sommare questi prodotti parziali, per ottenere il prodotto totale. Ma se, in vece di ottenere le cifre che debbono comporre le linee orizzontali, si trovassero quelle che debbono comporre le colonne verticali, se ne farebbe a mente la somma, e si potrebbero scrivere immediatamente le cifre del prodotto, come nel caso in cui il moltiplicatore è di una sola cifra.

Or si osservi che colla stessa regola con cui si trova il primo prodotto parziale si trovano tutti gli altri; ma siccome ciascun di essi si trova di un posto più avanzato del precedente, non bisogna che tener conto di questa circostanza per rinvenire i diversi numeri che compongono una colonna verticale. Per es. le unità del prodotto della 2^a cifra del moltiplicatore per la quarta del moltiplicando appartengono alla quinta colonna; quelle della 4^a del moltiplicatore per la 3^a del moltiplicando appartengono alla 6^a colonna, e così di seguito. Supponiamo adunque che si debba fare il prodotto di 365847 per 4378. La prima cifra del prodotto sarà data dalle unità del prodotto 7×8 , e sarà 6. La seconda cifra sarà data dalla somma, delle decine del prodotto precedente cioè 5, e delle unità de' due prodotti della 1^a cifra dell'uno per la 2^a dell'altro e viceversa, cioè de' due prodotti 4×8 e 7×7 , che sono 2 e 9; ed essendo $2+9+5=16$, la seconda cifra sarà 6. La terza cifra del prodotto risulta dall'1 che si riporta dalla somma precedente, dalle decine de' due prodotti precedenti che sono 3 e 4, e dalle unità de' tre prodotti che risultano moltiplicando ciascuna delle prime tre cifre a destra del moltiplicando per le tre cifre del moltiplicatore prese in ordine inverso, cioè dalle unità de' tre prodotti 8×8 , 4×7 , 7×3 che sono 4, 8, 1; e quindi la terza cifra risulterà dalle unità della somma $1+3+4+4+8+1=21$, e sarà perciò 1. La quarta si ottiene sommando il 2 che si riporta dalla somma precedente, le decine de' tre prodotti precedenti, e le unità de' quattro prodotti della 1^a, 2^a, 3^a e 4^a cifra (a destra) del moltiplicando rispettivamente per la 4^a, 3^a, 2^a e 1^a cifra del moltiplicatore. E così di seguito.

Si rende più facile l'operazione scrivendo il moltiplicatore in ordine inverso e in un pezzo di carta separato. Con questo ripiego il moltiplicatore, reso mobile, si andrà successivamente applicando sotto le cifre del moltiplicando, situando la prima cifra a sinistra di esso moltiplicatore invertito sotto la prima cifra a destra del moltiplicando,

e poi facendolo avanzar di un posto per ogni volta , e moltiplicando sempre le cifre che si corrispondono verticalmente. Riprendendo l'operazione di sopra , e scrivendo 8734 in vece del moltiplicatore dato, si situerà da principio nel modo che si vede in A. La prima cifra del prodotto sarà quella delle unità del prodotto delle cifre corrispondenti alla stessa verticale , cioè sarà 6. Si prendono poi le diecine di questo prodotto cioè 5 , si fa camminare il moltiplicatore come si vede in B , e al 5 si uniscono le unità date da' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente. Si dirà dunque 5 più 9 più 2 fanno 16 , e si scrive il 6. Poi 1 che si riporta più 4 più 3 , che sono le diecine de' due prodotti precedenti, fanno 8 ; si tiene a memoria l'8 e si trasporta il moltiplicatore come si vede in C. In seguito si dirà : 8 che si riporta più 1 più 8 più 4 , che sono le unità de' prodotti delle cifre che si corrispondono , fanno 21 , e si scrive l'1 per terza cifra. Poi si dirà : 2 che si riporta dalla somma precedente, più 2 più 2 più 6 , che sono le diecine de' prodotti precedenti, fanno 12 ; si tiene a memoria il 12 , e si passa il moltiplicatore più avanti, come si vede in D. In seguito si dirà : 12 che si riporta, più 8 + 2 + 6 + 0 , che sono le unità de' nuovi prodotti, fanno 28 ; si scrive l'8 per 4^a cifra, e si riporta il 2. Poi 2 che si riporta, più 2 + 1 + 5 + 4 , che sono le diecine de' prodotti precedenti, fanno 14 ; passato il moltiplicatore più avanti, come si vede in E , si dirà : 14 che si riporta , più 6 + 4 + 5 + 8 , che sono le unità de' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente, fanno 37 ; si scrive 7 per 5^a cifra. In seguito : 3 che si riporta più 1 + 2 + 3 + 4 , che sono le diecine de' prodotti precedenti, fanno 13 ; si passa il moltiplicatore come si vede in E , e si dirà : 13 + 2 + 5 + 2 + 4 fanno 26 ; e si scrive il 6. Poi 2 + 3 + 1 + 4 + 2 fanno 12 ; passato il moltiplicatore più avanti, come si vede in G , si dirà : 12 + 0 + 8 + 1 = 21 , e si avrà per settima cifra 1. Poesia 2 + 2 + 1 + 2 = 7 ; spinto il moltiplicatore più innanzi, come si vede in H , si dirà : 7 che si riporta + 4 + 9 = 20 , per cui l'ottava cifra sarà 0 , e si riporta 2. In seguito 2 + 2 = 4 , e fatto camminare di un altro posto il moltiplicatore, come si vede in I , si dirà : 4 + 12 , prodotto di 4 per 3 , fanno 16 , che si scrive per intero , non essendovi più cifre né fattori. Il prodotto cercato sarà dunque 1601678166.

Questa maniera di eseguir la moltiplicazione può a prima vista sembrar più difficile dell'ordinaria. Ma la difficoltà svanisce interamente , scrivendo il moltiplicatore in ordine inverso e rendendolo mobile , giacchè basta il più breve esercizio per acquistar l'abitudine di chiamare e sommare le unità o le diecine de' prodotti de' numeri semplici , guar-

$$\begin{array}{r} \text{A} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{B} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{C} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{D} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{E} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 123 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{F} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{G} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{H} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 365847 \\ \quad 8734 \\ \hline \quad 12 \end{array}$$

dando solamente i numeri. Per es, ne' numeri posti a margine si dirà subito: $8+1+5$ fanno 14, 1 che si riporta $+4+2+1$ fanno 8; sicchè la somma de' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente è 84. 376
538

Del resto questo metodo non interessa tanto per l'uso che può far-sene, quanto per conoscere quali sono le cifre de' fattori che sono necessarie per comporre le diverse cifre del prodotto; e per intendere un metodo elegante per eseguir la divisione più brevemente, allorchè il divisore ha moltissime cifre, proposto da Fourier sotto il nome di *divisione ordinata*.

147. Questo metodo consiste nell'impiegare le cifre del divisore a misura che si rendono necessarie per ottenere la cifra esatta nel quoziente.

Per meglio svilupparlo ragioneremo sopra un esempio. Si debba dividere 357943297372 per 7546729375.

$$\begin{array}{rcl}
 1^{\circ} \text{ divid.} & \overline{35794'3'2'9'7'3'72} & \left| \overline{7546'7'2'9'3'75} \right. \\
 & \underline{5634'} & \left. 4743 \text{ o } 2 \dots \right. \\
 & 24 = 4.6 & \\
 2^{\circ} \text{ div.} & \underline{5610} & \\
 & 3323' & \\
 & 70 = 4.7 + 7.6 & \\
 3^{\circ} \text{ div.} & \underline{3253} & \\
 & 2372' & \\
 & 51 = 4.2 + 7.7 + 4.6 & \\
 4^{\circ} \text{ div.} & \underline{2291} & \\
 & 299' & \\
 & 96 = 4.9 + 7.2 + 4.7 + 3.6 & \\
 5^{\circ} \text{ div.} & \underline{203} & \\
 & 2037' & \\
 & 104 = 4.3 + 7.9 + 4.2 + 3.7 + 0.6 & \\
 6^{\circ} \text{ div.} & \underline{1933} & \\
 & 425 &
 \end{array}$$

Per non servirsi di un divisore di molte cifre si prende un divisore formato dalle prime due cifre o pure dalle prime tre o dalle prime quattro a sinistra. Supponiamo che si prenda per divisore 754. Il dividendo corrispondente a questo divisore sarà 3579. Si faccia la divisione all'ordinario, e si avrà per prima cifra del quoziente 4 e per resto 3. Operando a tal modo, si sono tolti dal dividendo i prodotti della prima cifra 4 del quoziente per le sole prime tre cifre del divisore. Per l'esattezza del risultamento converrebbe toglierne i prodotti per 4 delle cifre che seguono 754; ma siccome questi prodotti sono rispettivamente dello stess'ordine delle cifre che seguono il primo dividendo 3579, si potrà andarli togliendo a misura che si calano le cifre del dividendo.

Calata la prima cifra 4, si ha il secondo dividendo 5634 che bisogna correggere sottraendone il prodotto di 4 per la prima delle cifre che seguono il divisore segnato, il qual prodotto è 24. Eseguita la correzione, si ha 5610 per 2° dividendo parziale. Si faccia al solito la divisione, e si ha per seconda cifra del quoziente 7, e per resto 332. Su questo resto ragionando come precedentemente, si vede che bisogna dal dividendo sottrarre tutti i prodotti di 7 per le cifre che seguono il divisore segnato, i quali prodotti sono rispettivamente dell'ordine stesso delle rimanenti cifre del dividendo. A misura dunque che queste cifre sono chiamate, bisognerà andarne togliendo tutti i prodotti dello stesso ordine di esse, dipendenti dalle cifre trascurate nel divisore. Calando la cifra 3 si ha 3323; i prodotti dello stesso ordine che bisogna sottrarre sono quelli che risultano dalla 1ª cifra del quoziente per la seconda di quelle che seguono il divisore segnato, e dalla seconda del quoziente per la prima delle dette cifre. La somma di questi prodotti è 70. Sottratto questo numero da 3323, si ha 3253 per terzo dividendo parziale corretto. Dividendo 3253 per 754 si ha per terza cifra del quoziente 4 e per resto 237. Calando la cifra seguente, si ha l'altro dividendo 2372 che bisogna correggere sottraendone la somma de' prodotti della 1ª, 2ª, 3ª cifra di quelle che sono a destra del divisore segnato rispettivamente per la 3ª, 2ª, 1ª. cifra del quoziente. Questa somma de' prodotti è 81, la quale sottratta da 2372 dà per resto 2291, che è il quarto dividendo parziale corretto. E così si continuerà.

Le somme de' prodotti che debbono sottrarsi da ciascun dividendo parziale si ottengono scrivendo in ordine inverso e in un foglio separato le cifre del quoziente, poi presentandole successivamente alle cifre che sono a destra del divisore segnato si tratterà di far la somma delle unità e delle decine de' prodotti delle cifre che si corrispondono verticalmente, la quale somma si ottiene senza che vi sia bisogno di scrivere i prodotti (n. prec.).

L'operazione così eseguita riesce facilissima. Questo metodo differisce da quello esposto al n° 141. Giacchè in quel caso è determinato anticipatamente il numero delle cifre che si vogliono nel quoziente, e si vanno rifiutando le cifre a destra del divisore, a misura che queste si rendono inutili per le cifre che si cercano nel quoziente; in guisa però che l'operazione non si potrebbe prolungare al di là di quello che si era stabilito nel cominciarla. In questo si procede in ordine inverso; si fa uso di un divisore assai semplice prendendo per formarlo le sole prime due o tre cifre, e si chiamano le altre cifre del divisore a misura che si rendono necessarie per l'esattezza delle cifre del quoziente. Con ciò si evita ogni calcolo inutile, e si può prolungar l'operazione finchè si vuole: vantaggio di grandissimo conto. Il metodo qui esposto riesce poi sommamente utile quando il divisore ha moltissime cifre, e non si cercano che poche cifre nel quoziente.

148. Per la pratica di questa divisione sono necessarie alcune osservazioni.

1° Siccome ogni resto unito alla cifra che si cala, dev'esser corretto

per formare un dividendo parziale, la cifra scritta nel quoziente sarà esatta, ogni volta che la correzione è possibile.

2° La correzione è sempre possibile, quando il resto è maggiore o almeno eguale alla somma delle cifre già scritte nel quoziente e considerate come se fossero unità; giacchè il resto col calar l'altra cifra si rende maggiore del decuplo, e le diverse cifre del quoziente sono moltiplicate per numeri minori di 10. Gioverà dunque per ogni resto assicurarsi di questa condizione; se essa non ha luogo, la cifra scritta nel quoziente è incerta.

3° Quando la correzione non si può fare, la cifra scritta al quoziente è troppo grande, e bisogna diminuirla di un'unità. Se dopo diminuita la cifra del quoziente, e ripetuta l'operazione, si ha un altro resto, su cui nemmeno può eseguirsi la correzione, si diminuirà la cifra del quoziente di un'altra unità, e ciò si ripeterà finchè il resto divenga tanto grande che unito alla cifra che segue dia un numero maggiore della somma de' prodotti che se ne debbono sottrarre.

4° Se si è preso per divisore segnato un numero troppo piccolo di cifre, avverrà presto che la correzione non potrà farsi; giacchè il resto è sempre minore del divisore, e il numero de' prodotti da sottrarsi da ogni dividendo parziale va in generale crescendo a misura che si spinge più innanzi l'operazione, fino a che non sieno esaurite tutte le cifre rimaste a destra del divisore. In questo caso non si troverà la vera cifra del quoziente che dopo un numero di tentativi più o meno grande. Siccome l'impossibilità della correzione dipende dall'esser troppo piccolo il divisore adottato, si evita questa ripetizione di calcolo prendendo un divisore con qualche cifra di più.

5° Volendo prender un divisore con una cifra di più, non è necessario incominciare da capo l'operazione. Ma quando si ha un dividendo parziale già corretto, in vece di trovar l'altra cifra del quoziente, si calerà un'altra cifra del dividendo, il che darà un nuovo dividendo parziale; nel tempo stesso si agglierà un'altra cifra al primo divisore scelto, e si avrà un nuovo divisore segnato.

Si farà poi sul nuovo dividendo parziale la consueta correzione, paragonando le cifre del quoziente con un egual numero di quelle rimaste a destra del nuovo divisore segnato.

6° Si può nel corso dell'operazione diminuire o aumentare a piacere il numero delle cifre che si sono segnate per formare il divisore segnato; giacchè per diminuirlo si eseguirà la divisione sul resto senza calar una nuova cifra; e per aumentarlo, si calerà una seconda cifra dopo fatta la prima correzione, e per ogni cifra che si cala si farà una nuova correzione.

7° Se si volesse il resto di una divisione eseguita con questo metodo, bisognerà calar tante cifre dal dividendo (una per volta) quante ne sono necessarie per prender il divisore con tutte le cifre.

8° È inutile in questa operazione tener conto della grandezza dell'unità cui si riferisce il quoziente, giacchè nella divisione si conosce, indipendentemente dall'operazione, di che ordine è la prima cifra del quoziente.

1° ESEMPIO.

$$\begin{array}{r}
 \overline{2734'9'6'5',8'9'o'o'..} \mid \overline{763'4'2'9',5'8'7'3'2'5'4'37} \\
 \underline{454'} \\
 9(=3.3) \quad \mid \quad \underline{3,58247 \ 30078....} \\
 2^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{445'} \\
 \quad \underline{659'} \\
 \quad \quad 27(=3.4+5.3) \\
 3^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{632} \\
 \quad \underline{246'} \\
 \quad \quad 50(=3.2+5.4+8.3) \\
 4^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{196} \\
 \quad \underline{445'} \\
 \quad \quad 75(=3.9+5.2+8.4+2.3) \\
 5^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{370} \\
 \quad \underline{668'} \\
 \quad \quad 96(=3.5+5.9+8.2+2.4+4.3) \\
 6^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{572} \\
 \quad \underline{409'} \\
 \quad \quad 162(=3.8+5.5+8.9+2.2+4.4+7.3) \\
 7^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{247} \\
 \quad \underline{190'} \quad (19 < 3+5+8+2+4+7+3: \text{ la cifra 3 \acute{e} incerta}) \\
 \quad \quad 164(=3.7+5.8+3.5+2.9+ec.) \\
 \text{Nuovo divid. parziale} \cdot \underline{260'} \quad (\text{La correzione pu\`o farsi per cui la cifra 3 del} \\
 \quad \quad \quad \text{quoziente \acute{e} esatta. Ma il divisore segnato} \\
 \quad \quad \quad \text{essendo divenuto troppo piccolo per prose-} \\
 \quad \quad \quad \text{guire l'operazione, si cala un'altra cifra} \\
 \quad \quad \quad \text{dal dividendo, e si prende 163 per nuovo} \\
 \quad \quad \quad \text{divisore segnato}) \\
 \quad \quad \underline{180} \quad (=3.3+5.7+8.8+2.5+...+3.4) \\
 8^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{80} \\
 \quad \underline{800'} \\
 \quad \quad 182(=3.2+5.3+....+3.2+0.4) \\
 9^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{618} \\
 \quad \underline{6180'} \\
 \quad \quad 157(=3.5+5.2+....+3.9+0.2+0.4) \\
 10^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{6023} \\
 \quad \underline{6820'} \\
 \quad \quad 186(=3.4+5.5+...+0.2+7.4) \\
 11^{\circ} \text{ div. parz. corr.} \cdot \underline{6634} \\
 \quad \underline{530}
 \end{array}$$

2° ESEMPIO.

$$\begin{array}{r}
 \overline{538}, 0'0'0' \dots \quad \bigg| \quad \overline{9,2'5'4'3'2'9'6} \\
 \underline{88'} \\
 10 \\
 \underline{78} \\
 60' (6 < 5+8; \text{per cui la cifra } 8 \text{ è incerta}) \\
 \underline{41} \\
 190' (\text{la cifra } 8 \text{ è esatta; però si cala un'altra cifra, e si prende } 92 \text{ per nuovo divisore segnato}) \\
 \underline{60} \\
 130 \\
 \underline{380'} \\
 52 \\
 \underline{328} \\
 520' \\
 \underline{53} \\
 467 \\
 70' (7 < 5+8+1+3+5; \text{per cui la cifra } 5 \text{ è incerta}) \\
 101 (\text{la correzione non può farsi; perciò la cifra } 5 \text{ è troppo grande}) \\
 990' (\text{si è scritto } 4 \text{ in vece di } 5 \text{ al quoziente, e si è avuto per nuovo resto } 99) \\
 \underline{96} \\
 8940' (\text{si cala un'altra cifra, e si prende } 925 \text{ per nuovo divisore segnato}) \\
 \underline{129} \\
 8811 \\
 4860' (\text{Arrivati a questo punto se si volesse il resto, si calerebbero tante cifre dal dividendo finchè si prende per divisore il divisore intero, non dimenticando di fare, per ogni cifra che si cala, la correzione.}) \\
 \\
 \begin{array}{r}
 \text{III} \\
 \underline{47490'} \\
 68 \\
 \underline{474220'} \\
 72 \\
 \underline{4741480'} \\
 105 \\
 \underline{47413750'} \\
 54 \\
 47413696 (\text{Resto})
 \end{array}
 \end{array}$$

150. La divisione ordinata riesce utilissima, quando o il dividendo o il divisore o amendue non sono esatti ma approssimati; giacchè impiegandosi le cifre del dividendo e del divisore a misura che bisogna, si può facilmente giudicare quando le cifre che mancano possono cominciare a influir su le cifre del quoziente.

151. Allorchè si ha una frazione espressa in termini molti grandi ed irriducibile, è necessario in molti casi aver delle frazioni approssimative alla data ed espresse in termini più semplici. Si potrebbe convertir la frazione proposta in decimali, e terminando l'operazione alla prima, seconda, terza, ec. decimale, si avrebbero delle frazioni sempre più prossime alla vera. Ma queste frazioni decimali non sono le più semplici fra tutte quelle che per un dato grado di approssimazione si avvicinano alla proposta. Ecco come si deve procedere in questo caso.

Si abbia per es. la frazione $\frac{537}{2935}$. Per formarsi un' idea distinta del valore rappresentato da questa espressione, dividiamo i suoi termini per 537 e siccome $\frac{2935}{537} = 5 + \frac{250}{537}$, si avrà $\frac{537}{2935} = \frac{1}{5 + \frac{250}{537}}$. Con questa sola operazione si conosce già che la frazione proposta è compresa fra $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$. Trascurando il resto 250, si ha la frazione $\frac{1}{5}$ un poco più grande della proposta.

Volendo tener conto anche del resto 250, si opererà sulla frazione $\frac{250}{537}$, come sulla prima frazione, cioè si divideranno i suoi termini per 250 e si avrà $\frac{537}{2935} = \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{17}{250}}}$. Trascurando

il resto 37, la frazione proposta sarà prossimamente uguale a $\frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$, cioè eguale a $\frac{2}{11}$. La frazione $\frac{2}{11}$ sarà un poco più piccola della data, giacchè trascurando la frazione $\frac{37}{250}$ si ha $\frac{1}{2} > \frac{1}{2 + \frac{17}{250}}$. Aggiungendo a 5 una quantità troppo grande, si ha il denominatore $5 + \frac{1}{2}$ maggiore del giusto, per cui la frazione $\frac{1}{5 + \frac{1}{2}}$ sarà troppo piccola.

Volendo ancora tener conto del resto 37, si opererà sulla frazione $\frac{37}{250}$ come sulle precedenti; e si avrà $\frac{537}{2935} = \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{13}{250}}}}$

Trascurando il resto 28, si ha $\frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}} = \frac{13}{71}$, frazione mag-

Sia per es. la frazione $\frac{234}{6251}$. Ecco il quadro dell'operazione da eseguirsi.

6251	734	379	355	24	19	5	4	1
	8	1	1	14	1	3	14	
1303	153	79	74	5	4	1	1	
1039	122	63	59	4	3	1		
264	31	16	15	1	1			
247	29	15	14	1				
17	2	1	1					
9	1	1						
8	1							

I numeri contenuti nelle due prime colonne a sinistra sono i termini delle ridotte successive, le quali saranno perciò

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{17}, \frac{29}{247}, \frac{31}{264}, \frac{122}{1039}, \frac{153}{1303}$$

tutte convergenti, ora in più ora in meno, verso la frazione $\frac{234}{6251}$.

Quindi se i termini della frazione contengono qualche divisore comune, la frazione continua che ne risulta dà immediatamente la frazione ridotta alla sua più semplice espressione.

154. L'esposto metodo può applicarsi ancora ad una frazione decimale non esatta, ad oggetto di trovare delle frazioni approssimate espresse in termini più semplici. Ma non tutte le ridotte che se ne ricavano possono esser egualmente ritenute come frazioni convergenti verso la quantità data. Infatti supponiamo che questa sia approssimata per difetto, aumentando l'ultima cifra di un'unità, si hanno due limiti fra i quali dev'esser compresa la quantità data. Per non uscir da questi limiti, bisogna operare su tutte due le frazioni, e ritenere i soli quozienti comuni. È forse inutile avvertire che se la frazione data fosse approssimata per eccesso, l'altro limite si ha diminuendo l'ultima cifra di un'unità.

Sia per es. il numero frazionario $3,14159265\dots$ minore del vero. È chiaro che la quantità data, qualunque sieno le cifre che seguono l'ultima, sarà compresa fra $3,14159265$ e $3,14159266$. Riducendo in frazione continua la frazione $\frac{314159265}{100000000}$, si hanno i quozienti

$$3, 7, 15, 1, 288\dots$$

e riducendo similmente l'altra $\frac{314159266}{100000000}$, si hanno i quozienti

$$3, 7, 15, 1, 299\dots$$

Da ciò si vede che i soli primi quattro quozienti sono esatti; vale

a dire che le cifre trascurate nella frazione decimale data non influiscono sulle prime quattro ridotte. Si ha dunque la frazione continua

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \text{ec.}}}}$$

che dà le quattro ridotte esatte

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{105}, \frac{355}{113}^{(*)}.$$

..32

(*) La quantità $3,14159265\dots$ rappresenta il rapporto della circonferenza al diametro. La frazione $\frac{355}{113}$ è quella assegnata da Archimede. La quarta, cioè $\frac{355}{113}$ data da Mezio, merita esser avvertita con particolarità, tanto perchè con termini assai semplici esprime molto prossimamente il suddetto rapporto da cui differisce per meno di $\frac{1}{100000000}$ quanto perchè la disposizione della sue cifre presenta una circostanza che le fa ritenere facilmente a memoria. Di fatto scritti i primi tre numeri impari ognuno due volte, si ha 113355, di cui le prime tre cifre appartengono al denominatore, le altre tre al numeratore della menzionata frazione.

C A P O VIII.

DELLA RAGIONE E DELLA PROPORZIONE.

155. Si è detto (n° 2) che per aver idea di una grandezza bisogna paragonarla ad un'altra della medesima specie collo scopo di vedere quante volte vi è contenuta. Il risultamento di questo confronto si chiama il *rapporto* o la *ragione* delle due quantità.

Perciò (n° 3) il numero non è che il rapporto che una quantità ha colla sua unità.

Per veder quante volte una quantità contiene un'altra, bisogna eseguire una divisione. Quindi il rapporto di due quantità è precisamente il quoziente di una divisa per l'altra. Per es. se si ha una quantità rappresentata da 5 e un'altra da 15, $\frac{15}{5}$ ovvero 3 sarà la loro ragione; parimenti $\frac{7}{9}$ è il rapporto delle due quantità 9 e 7.

Per indicare il rapporto di 9 a 7 si scrive 9:7; e così in ogni altro caso. I numeri 9 e 7 si dicono i *termini* del rapporto.

Non si può stabilire rapporto che fra quantità della medesima specie o *omogenee*. Ma il rapporto, essendo indipendente dalla natura di queste quantità, sarà sempre un numero astratto.

156. Se si hanno due rapporti eguali, i quattro termini che li compongono costituiranno una *proporzione*. Il rapporto 3:12 essendo uguale a quello di 5:20, questi quattro numeri formeranno una proporzione, la quale si scrive

$$3:12::5:20,$$

e si legge 3 sta a 12 come 5 a 20.

Dunque la *proporzione* è l'*eguaglianza di due ragioni*.

I rapporti essendo numeri astratti, i termini che in una proporzione compongono il primo rapporto possono essere di specie diversa o *eterogenei* con quelli del secondo.

I primi termini di ogni rapporto si chiamano *antecedenti*, e i secondi *consequenti*. Quando si tratta di esprimere sotto forma di frazione i rapporti di cui si compone la proporzione, è indifferente prender per numeratore o il con-

seguito o l' antecedente , purchè in ciascun rapporto si pratici lo stesso. Noi converremo di prender sempre per numeratore il conseguente.

Se il conseguente del primo rapporto è uguale all' antecedente del secondo , la proporzione si dice *continua*. Una proporzione continua si può scriver più brevemente $\div 3:6:12$, in vece di $3:6::6:12$.

157. Siccome il numero , che è un rapporto , esprime in che modo una quantità si forma per mezzo della sua unità , in generale il rapporto di due quantità esprimerà in che modo una quantità può formarsi per mezzo di un' altra. Per es. il rapporto di 5 a 15 è $\frac{1}{3}$ ossia 3. Questo 3 fa conoscere in che modo il 15 si forma prendendo per elemento 5, ed esprime che per formar 15 ci vogliono tre quantità rappresentate da 5. Parimenti il rapporto di 9 a 6 è $\frac{2}{3}$ ovvero $\frac{3}{2}$, la quale frazione indica che per formare la quantità 6 per mezzo del 9 bisogna prima raddoppiare il 9 e poi prenderne la terza parte.

Il quoziente, o la frazione che rappresenta il rapporto di due quantità , essendo anch' esso un rapporto quando si riferisce all' unità , ne segue che il dividendo , il divisore , il quoziente e l' unità formano una proporzione. Per la ragione medesima il prodotto , il moltiplicando , il moltiplicatore e l' unità sono in proporzione. Perciò nella divisione si tratta di esprimere il rapporto di due quantità per mezzo di un altro rapporto che ha per uno de' termini l' unità ; e nella moltiplicazione, conoscendo in che modo una quantità è composta per mezzo dell' unità , si tratta di comporre similmente un' altra quantità per mezzo del moltiplicando.

L' idea della proporzione fa meglio comprender l' oggetto di queste due operazioni ; le quali , quantunque si possono eseguire , l' una per mezzo dell' addizione l' altra per la sottrazione , offrono un carattere che permette di riguardarle sotto un altro punto di vista ; ed è , che i due numeri dati quello che si cerca e l' unità , presi secondo l' ordine conveniente , debbono formare una proporzione.

158. I numeri interi e frazionari , chiamati quantità commensurabili , perchè hanno coll' unità una misura comune (n° 56), si dicono anche quantità *razionali*, perchè il loro rapporto o la ragione può esser espressa da due numeri interi. Il rapporto di $\frac{3}{4}$ a 1 è quello di 3:4.

159. Si possono paragonar due quantità della medesima specie per conoscer la loro ineguaglianza, e il risultamento di questo confronto si dice *differenza* (n° 13). Quattro numeri ne' quali la differenza tra il primo e il secondo è uguale alla differenza fra il terzo e il quarto costituiscono un' *equidifferenza*, la quale si scrive 7.5:13.11 (*).

Le parole *termini*, *antecedente*, *conseguente*, *equidifferenza continua* hanno lo stesso significato che nella proporzione.

La teorica dell'equidifferenza essendo facilissima, e d'altronde non avendo bisogno di trattarne per le cose che seguono, passeremo immediatamente ad occuparci della proporzione.

A R T. I.

Proprietà delle proporzioni.

160. Un rapporto, essendo il quoziente di un numero diviso per un altro, non si altera moltiplicando o dividendo i suoi termini per un medesimo numero. Perciò il rapporto di 3:5 è lo stesso che quello di 6:10.

161. Dalla proporzione 3:12::5:20 si ha $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$; le quali frazioni ridotte allo stesso denominatore danno $\frac{12 \times 5}{3 \times 5} = \frac{20 \times 3}{3 \times 5}$.

Ma due frazioni eguali, dello stesso denominatore, avranno i numeratori eguali, perciò sarà $12 \times 5 = 20 \times 3$; dunque in ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è eguale al prodotto de' medi.

Per assicurarsi se fra quattro termini vi è proporzione, bisogna verificare se il prodotto de' termini estremi è eguale a quello de' medi.

(*) Ordinariamente il risultamento del confronto fatto fra due quantità o nel primo o nel secondo modo dicesi in generale rapporto; ma si dice *rapporto geometrico* quello in cui si cerca il quoziente, e *rapporto aritmetico* quello in cui si domanda la differenza. Così pure la proporzione si chiama *geometrica* o *aritmetica* secondo che i rapporti di cui si compone sono dell'una o dell'altra specie. Noi non potremmo ora entrare ad esaminare la poca esattezza di queste denominazioni; abbiamo però stimato, per servir meglio alla precisione del linguaggio, di non confonder con un medesimo vocabolo due idee diversissime.

È da osservare che in una proporzione, secondo che l'antecedente del primo rapporto è maggiore o minore del suo conseguente, anche l'antecedente del secondo rapporto dev'esser tale rispetto al suo conseguente. Per cui se si hanno quattro numeri, ne' quali a colpo d'occhio si scoprisse che manca questa condizione, si conchiuderà subito che dessi non sono in proporzione.

162. Dall' esposta proprietà risulta che i termini di una proporzione si possono cambiar di sito, purchè gli stessi termini si trovino sempre o gli estremi o i medi. Riprendendo la proporzione di sopra, i cambiamenti che si possono fare sono i seguenti.

$$\begin{array}{ll}
 3:12::5:20, & 12:3::20:5, \\
 3:5::12:20, & 12:20::3:5, \\
 20:12::5:3, & 5:3::20:12, \\
 20:5::12:3; & 5:20::3:12.
 \end{array}$$

I primi quattro cambiamenti, ne' quali si cangia il posto degli estremi o de' medi, s'indicano colla parola *permutando*; gli altri quattro, ne' quali si mettono gli estremi in vece dei medi, s'indicano colla parola *invertendo*.

163. In una proporzione qualunque moltiplicando o dividendo per un medesimo numero i due antecedenti o i due conseguenti, i numeri che ne risultano saranno proporzionali. Nella proporzione $3:12::5:20$, moltiplicando i due antecedenti per 2 e i conseguenti per 3, si ha un'altra proporzione $6:36::10:60$. Infatti la prima proporzione permutando diviene $3:5::12:20$; in questa si può moltiplicare i termini del primo rapporto per 2, e quelli del secondo per 3, e si ha $6:10::36:60$; e permutando di nuovo si ha $6:36::10:60$.

164. Sieno due proporzioni che hanno comuni gli antecedenti,

$$3:12::5:20, \quad 3:9::5:15;$$

permutando si avrà

$$3:5::12:20, \quad 3:5::9:15.$$

Ora i secondi rapporti di queste ultime proporzioni, essendo eguali al rapporto 3:5, saranno eguali fra loro; e perciò si avrà

$$12:20::9:15, \text{ ovvero } 12:9::20:15.$$

Perciò se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti formeranno una proporzione.

Si dimostra similmente che se due proporzioni hanno comuni i conseguenti, gli antecedenti saranno in proporzione.

165. Dalla proporzione 3:12::5:20 si ricavano le eguaglianze

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5}, \quad \frac{3}{12} = \frac{5}{20}.$$

Le quali non si alterano, se a ciascuna quantità si aggiunge l'unità; si avrà allora

$$1 + \frac{12}{3} = 1 + \frac{20}{5}, \quad 1 + \frac{3}{12} = 1 + \frac{5}{20};$$

ovvero

$$\frac{3+12}{3} = \frac{5+20}{5}, \quad \frac{3+12}{12} = \frac{5+20}{20}.$$

Da queste eguaglianze si può passare alle proporzioni

$$3+12:3::5+20:5, \quad 3+12:12::5+20:20;$$

ovvero, permutando,

$$3+12:5+20::3:5 \text{ o pure } ::12:20;$$

cioè in una proporzione qualunque la somma de' due primi termini sta alla somma de' due ultimi, come il primo al terzo o come il secondo al quarto. Questa operazione s'indica colla parola componendo.

Riferendo quest'ultima proposizione alla proporzione 3:5::12:20, si ricava che in una proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.

166. Dalle eguaglianze

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5}, \quad \frac{3}{12} = \frac{5}{20}$$

si ricava pure

$$\frac{12}{3} - 1 = \frac{20}{5} - 1, \quad 1 - \frac{3}{12} = 1 - \frac{5}{20}$$

e quindi

$$\frac{12-3}{3} = \frac{20-5}{5}, \quad \frac{12-3}{12} = \frac{20-5}{20};$$

dalle quali si passa alle proporzioni

$$12-3 : 20-5 :: 3 : 5, \text{ o pure } :: 12 : 20$$

cioè in una proporzione, la differenza de' due primi termini sta alla differenza de' due ultimi come il primo al terzo, o come il secondo al quarto. Questa operazione viene indicata colla parola dividendo.

167. Dalle due proporzioni

$$12+3 : 20+5 :: 3 : 5,$$

$$12-3 : 20-5 :: 3 : 5$$

risulta

$$12+3 : 12-3 :: 20+5 : 20-5;$$

cioè la somma de' due primi termini sta alla loro differenza, come la somma degli altri due termini sta alla loro differenza; ovvero: la somma degli antecedenti sta alla loro differenza come la somma de' conseguenti sta alla loro differenza.

168. Si abbiano diversi rapporti eguali

$$3 : 7 :: 5 : 15 :: 2 : 6 :: 4 : 12.$$

Co' medesimi si possono formare tre proporzioni, che sono:

$$3: 9:: 5: 15,$$

$$5: 15:: 2: 6,$$

$$2: 6:: 4: 12,$$

Dalla prima si ha

$$5+5: 9+15:: 5: 15.$$

La quale proporzione ha un rapporto comune colla seconda; per cui si ha

$$3+5: 9+15:: 2: 6.$$

Questa dà parimenti

$$3+5+2: 9+15+6:: 2: 6;$$

e per la terza proporzione si ha

$$3+5+2: 9+15+6:: 4: 12.$$

Componendo nuovamente si ha

$$3+5+2+4: 9+15+6+12:: 4: 12.$$

Si vede da ciò, che in una serie de' rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

169. Sieno più proporzioni

$$3: 6:: 12: 24,$$

$$5: 8:: 10: 16,$$

$$6: 7:: 18: 21.$$

Da queste si hanno le eguaglianze

$$\frac{6}{3} = \frac{24}{12}, \quad \frac{8}{5} = \frac{16}{10}, \quad \frac{7}{6} = \frac{21}{18}.$$

È evidente che il prodotto delle prime frazioni dev' esser

uguale al prodotto delle seconde, cioè

$$\frac{6}{3} \times \frac{8}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{24}{12} \times \frac{16}{10} \times \frac{21}{18},$$

ovvero

$$\frac{6 \times 8 \times 7}{3 \times 5 \times 6} = \frac{24 \times 16 \times 21}{12 \times 10 \times 18}.$$

Da questa eguaglianza si passa nuovamente alla proporzione

$$3 \times 5 \times 6 : 6 \times 8 \times 7 :: 12 \times 10 \times 18 : 24 \times 16 \times 21.$$

Ma questa proporzione risulta moltiplicando i termini corrispondenti delle tre proporzioni date; dunque *se si moltiplicano, termine per termine, diverse proporzioni, i prodotti saranno in proporzione.*

La ragione che risulta dal prodotto di più ragioni si chiama *ragione composta.*

170. Dall'essere in una proporzione il prodotto degli estremi eguale al prodotto de' medi, conoscendo tre termini si può trovare il quarto. Supponiamo che il termine incognito sia precisamente il quarto. Siccome il prodotto del primo e del quarto dev'esser eguale al prodotto de' due medi, sarà dato il prodotto e uno de' fattori; per cui dividendo il prodotto de' termini medi pel primo termine, si avrà il quarto termine. Per es. indicando con x il termine incognito, dalla proporzione $3 : 7 :: 12 : x$, si ricava $x = \frac{7 \times 12}{3} = 28$.

A R T. II.

Problemi dipendenti dalle proporzioni.

Le quistioni che si presentano in Aritmetica, quando non si possono risolvere direttamente con una delle quattro operazioni dipendono ordinariamente dalle proporzioni. Il sistema di operazioni da farsi vien conosciuto sotto il nome di *Regola.*

§. I. Della Regola del Tre.

171. Tutti i problemi che conducono ad una proporzione di cui son dati tre termini e l'altro è la quantità che si cer-

ca, si risolvono con una proporzione, seguendo la regola del n° prec., che dagli Aritmetici è chiamata *del tre*. A rischiarrar questa teorica presenteremo la soluzione di diverse quistioni.

I. Con 16 ducati si sono comprate 3 canne di stoffa, per comprare 13 canne della stessa stoffa quanto ci vorrà?

È da osservarsi che se il numero delle canne fosse doppio del primo, anche la somma necessaria dovrebbe esser doppia; se triplo il numero delle canne, anche tripla la somma; e così di seguito. Dunque il prezzo aumenta nello stesso rapporto della quantità della stoffa; perciò le due quantità di stoffa, e i due prezzi corrispondenti formeranno una proporzione; e si avrà $3:13::15:x$. E quindi sarà

$$x = \frac{13 \times 15}{3} = 65 \text{ ducati.}$$

II. Un corriere in 7 ore ha percorso 30 miglia; quante miglia percorrerà in 9 ore camminando colla medesima velocità?

È chiaro che in un tempo doppio percorrerebbe il doppio delle miglia, nella metà del tempo la metà delle miglia, ec. Dunque la distanza cresce o diminuisce nello stesso rapporto del tempo. Si stabilirà perciò la proporzione $7:9::30:x$; da cui

$$x = \frac{9 \times 30}{7}.$$

III. Con 30 operaj si sono fatte 75 canne di un dato lavoro; con 40 operaj quante canne di lavoro si faranno?

Siccome con un doppio o triplo numero di operaj, si farebbero il doppio o il triplo del lavoro, si avrà la proporzione

$$30:40::75:x = \frac{40 \times 75}{30} = 100.$$

172. Dall' esame di queste quistioni si rileva che la regola del tre non può applicarsi che quando una quantità cresce o diminuisce nello stesso rapporto di un'altra; e bisogna bene assicurarsi se questa circostanza si verifica. Se per es. si dicesse: un vaso di un dato diametro e di un metro di altezza si è vuotato in 5 minuti, in quanto tempo si vuoterà un altro vaso dello stesso diametro e di metri 47 di altezza? A questo problema non si potrebbe applicare la regola del tre, giacchè quando l' altezza è doppia non s' impiega un tempo doppio per vuotare il vaso ma un tempo minore. Così conoscendo che un corpo cadendo impiega un minuto secondo a

percorrere metri 4,9044, non si potrebbe conchiudere che in due minuti secondi percorre uno spazio doppio.

Vi è qualche caso in cui la proporzionalità non si verifica esattamente ma che si ammette per render più semplice il calcolo. Per es. se si dicesse: con 13 cavalli si è tirato un peso di 8 cantaja, 22 cavalli qual peso potranno tirare? Per poter con questi dati stabilire una proporzione bisogna supporre che il prodotto del travaglio cresca nel medesimo rapporto che cresce il numero dei cavalli. Or questo non è rigorosamente vero, giacchè lo sforzo che fa il cavallo dipende da molti elementi, e particolarmente dal sito in cui si trova; quindi bisognerebbe che nel secondo caso i 22 cavalli si trovassero tutti nella medesima attitudine de' primi, il che è difficile a combinarsi. Quando si fa uso della forza degli uomini o delle bestie, il prodotto del travaglio cresce come il loro numero solamente, quando essi possono agire separatamente sopra diversi punti. Ma quando debbono essere applicati allo stesso punto, il prodotto del travaglio non cresce come il numero degli agenti ma in una ragione minore. Solamente per un calcolo approssimativo si potrebbe stabilir una proporzione fra i dati del problema precedente; e fare $13:22::8:x = \frac{22 \times 8}{13}$.

173. Assicuratosi che la soluzione di una quistione può dipendere da una proporzione, non si ha altra difficoltà che quella di stabilire il posto che ciascun termine deve occupare. Or nelle quistioni di questo genere cercandosi il valore di una quantità che deve crescere o diminuire nello stesso rapporto di un'altra, fra i dati del problema vi saranno due termini *omogenei*, e uno che deve esser della medesima specie della cosa che si cerca. I due termini omogenei formano il primo rapporto, l'altro rapporto sarà formato dal termine isolato o *solitario* e dall'ignoto.

Nelle quistioni proposte i termini nella proporzione sono situati secondo l'ordine con cui si presentano nell'enunciato. Infatti riprendendo la prima quistione si vede, che siccome crescendo la quantità della stoffa cresce il suo prezzo, stabilendo il primo rapporto secondo l'ordine dell'enunciato cioè 3:13, il secondo rapporto deve seguir pure l'ordine medesimo, perchè il prezzo che si cerca dovendo esser maggiore del prezzo dato, il termine ignoto dev'essere il conseguente del secondo rapporto (u° 161). Lo stesso si verifica ne' due problemi che seguono.

Vi sono però delle quistioni nelle quali la quantità che si cerca cresce a misura che un'altra diminuisce, e viceversa; siccome mostrerà il seguente problema.

IV. Un dato lavoro si è fatto da 15 uomini in 7 giorni, quanto tempo impiegheranno 24 uomini per fare lo stesso lavoro? -

Qui si vede che quanto maggiore è il numero degli uomini tanto minor tempo s'impiegherà; sicchè se il numero degli uomini fosse doppio, il tempo necessario sarebbe la metà; se triplo il numero degli uomini, vi bisognerà la terza parte del tempo; e così discorrendo. Se dunque si stabilisce il primo rapporto secondo l'ordine dell'enunciazione, cioè 15: 24, siccome il tempo che si cerca deve esser minore del tempo dato, il secondo rapporto sarà $x: 7$; e si avrà la proporzione 15: 24: $x: 7$, da cui si ricava $x = \frac{7 \times 15}{24}$.

Si costuma ordinariamente di metter il termine incognito nel quarto posto della proporzione. In tal caso per *intavolare* la proporzione si terrà la seguente regola. Col termine solitario e coll'incognito si stabilirà il secondo rapporto mettendo l'incognito per conseguente; siccome i dati del problema fanno conoscere se la quantità che si cerca dev'esser maggiore o minore del termine solitario, fra i due termini omogenei si stabilirà il rapporto secondo l'ordine di grandezza che serban gli altri due termini. A questo modo nel problema precedente avendo stabilito il secondo rapporto 7: x , il primo dovrà esser 24: 15.

174. Quando una quantità cresce nello stesso rapporto di una altra, in guisa cioè che se la prima diviene doppia o tripla ec., anche la seconda diviene doppia o tripla ec., si dice che queste quantità sono fra loro in *ragion diretta*, o *direttamente proporzionali*. Se una quantità cresce nello stesso rapporto che un'altra diminuisce, in modo cioè che se la prima diviene doppia o tripla, la seconda diviene la metà o la terza parte, queste quantità sono in *ragione inversa*, o *inversamente proporzionali*. Si dice quindi che il prezzo di una cosa è in ragion diretta della sua quantità; che il tempo per eseguire un dato lavoro è in ragion inversa del numero degli uomini che vi s'impiegano.

L'enunciato de' problemi di questo genere si compone sempre di due parti; la prima contiene due quantità eterogenee ma

note, la seconda contiene due altre quantità rispettivamente omogenee alle prime, ma delle quali una è incognita. Or quando queste quantità eterogenee sono in ragion diretta, i termini contenuti nella prima parte dell'enunciato formano i due antecedenti; nell'altro caso, cioè quando sono in ragion inversa, bisogna invertir l'ordine de' termini di uno de' rapporti.

Affinchè meglio s'intenda il significato di questi vocaboli faremo osservare, che due frazioni che hanno lo stesso denominatore si dice che sono in ragion diretta de' numeratori. In fatti il rapporto di $\frac{7}{12} : \frac{5}{12}$ è eguale a quello di $7 : 12$. Al contrario due frazioni con lo stesso numeratore sono in ragione inversa de' loro denominatori. Giacchè il rapporto $\frac{3}{7} : \frac{3}{5}$, potendosi i suoi termini divider per 3, sarà eguale a quello di $\frac{1}{7} : \frac{1}{5}$; or questo rapporto, moltiplicando i suoi termini per 7 e per 5 diviene quella di $7 : 5$, perciò sarà $\frac{3}{7} : \frac{3}{5} :: 7 : 5$. E già si sapeva (n° 61), che una frazione cresce al crescer del numeratore e diminuisce al crescer del denominatore.

175. Ecco ancora altri problemi per esercizio.

V. Con ducati 137,40 si sono avute libbre 10 e once 7 di argento, quanto se ne potrà avere con ducati 621,36?

La proporzione è diretta, perchè l'ar- Ducati
gento cresce al crescer del danaro. Si ha 137,40 10^{lib.} 7^{on.}
dunque la proporzione 661,32 x

$$137,40 : 661,32 :: 10^{\text{lib.}} 7^{\text{on.}} : x.$$

I due primi termini si possono ridurre a numeri astratti moltiplicandoli per 100; poi si può render più semplice il primo rapporto dividendone i termini per 12. E la proporzione diverrà

$$1145 : 5511 :: 10^{\text{lib.}} 7^{\text{on.}} : x.$$

Fatto il calcolo, si trova $x = 50^{\text{lib.}} 11^{\text{on.}} 2^{\text{dr.}} 1^{\text{tr.}} 18^{\text{gr.}} \frac{158}{9}$.

VI. Un Corriere ha fatto un dato viaggio in 8 giorni camminando 9 ore al giorno; si vuol sapere quante ore al giorno dovrà camminare per fare lo stesso viaggio in 5 giorni?

Qui le ore sono in ragione inversa de' giorni; giorni ore
giacchè quanto meno giorni si vogliono impiegare 8 9
tanto maggiore dev'esser il numero delle ore di 5 x

viaggio di ogni giorno. Si avrà dunque la proporzione

$$5:8::9:x;$$

d'onde $x = \frac{72}{5} = 14^{\text{or.}} 24'$

VII. Una certa quantità di orzo è stata consumata da 300 cavalli in 15 giorni; per quanto tempo la stessa quantità di orzo potrà alimentare 470 cavalli?

In questo problema il rapporto è pure inverso, giacchè più grande è il numero de' cavalli, più presto si consumerà l'orzo. Si ha

	cav.	gior.
	300	15
	540	x

dunque la proporzione

$$540:300::15:x.$$

Nel primo rapporto si può sopprimere un zero, e poi dividere i termini per 6, e si avrà $9:5::15:x$. I due antecedenti si possono anche divider per 3, e si avrà finalmente $3:5::5:x$; da cui $x = \frac{25}{3} = \text{giorni } 8 \frac{1}{3}$.

VIII. In una piazza assediata si hanno i viveri per 4 giorni; volendo resistere per altri 10 giorni a quanto dovranno ridursi le razioni?

La razione che basta per quattro giorni si può rappresentare per un numero qualunque, ma sarà più semplice di rappresentarla per 1. Si dirà allora: se dando la razione 1 si hanno i viveri per 4 giorni, affinchè i viveri bastino 10 giorni quale razione bisogna dare?

Il rapporto è inverso. La proporzione sarà $10:4::1:x$, da cui $x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, cioè la razione dev'esser ridotta a due quinti dell'ordinaria.

§. II. Regola del tre composta.

176. Vi sono de' problemi ne' quali la quantità che si cerca dipende da più cose alle quali è direttamente o inversamente proporzionale. Ecco uno di questi problemi.

IX. Un operaio ha fatto 6 canne di muro lavorando per 12 giorni 7 ore al giorno; in 15 giorni lavorando 10 ore al giorno quante canne di muro farà?

Si faccia prima astrazione del numero delle ore; e si dica: se un operaio in 12 giorni fa 6 canne di muro, in 15 giorni quante canne di muro farà? Si avrà quindi la proporzione

$$12:15::6:x,$$

da cui si ricava $x = \frac{15 \times 6}{12}$; e questa sarà la quantità di muro che farebbe se in entrambi i casi lavorasse per un egual numero di ore. Poi si dirà: se travagliando 7 ore al giorno fa canne $\frac{15 \times 6}{12}$ di muro, quanto ne farà travagliando 10 ore al giorno? e si avrà l'altra proporzione

$$7 : 10 :: \frac{15 \times 6}{12} : x ;$$

$$\text{quindi } x = \frac{10 \times 15 \times 6}{7 \times 12}.$$

Si poteva anche risolvere questo problema, scrivendo contemporaneamente le due proporzioni, e chiamando x' (*) il termine ignoto della prima proporzione, si avrà allora

$$\begin{aligned} 12 : 15 :: 6 : x', \\ 7 : 10 :: x' : x. \end{aligned}$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine risulta

$$12 \times 7 : 15 \times 10 :: 6 \times x' : x' \times x ;$$

e dividendo il secondo rappotto per x' , si ha finalmente

$$x = \frac{10 \times 15 \times 6}{7 \times 12}.$$

Questo valore di x si può scrivere ancora sotto la forma $\frac{10}{7} \times \frac{15}{12} \times 6$, dalla quale si rileva che esso è eguale al termine solitario moltiplicato pel prodotto de' rapporti de' giorni e delle ore.

Non sarà inutile avvertire che questo problema si poteva ridurre alla regola del tre semplice, osservando che un travaglio di 12 giorni per 7 ore al giorno equivale a un travaglio di ore 84, e che un travaglio di 15 giorni per 10 ore al giorno equivale a 150 ore di travaglio. Ridotto così il problema, si ha subito la proporzione

$$84 : 150 :: 6 : x ,$$

(*) x' si pronunzia x primo; ed x'' , x''' , ec. si pronunziano x secondo, x terzo, ec.

che è identica a quella trovata per altra via.

177. Ecco un altro problema più complicato.

X. Si è cavato un canale di pal. 1200 di lunghezza, di larghezza pal. 10 e di profondità palmi 4, e vi si sono impiegati 17 operaj per 8 giorni, travagliando ciascuno per 9 ore al giorno; dovendosi cavare un altro canale di larghezza palmi 8, di profondità pal. 5, si vuol sapere quale lunghezza se ne caverà in 13 giorni con 24 operaj che travagliano 12 ore al giorno?

Si disporranno l'uno sotto l'altro i dati compresi nelle due parti dell'enunciato, come si vede qui sotto.

Uom.	gior.	or.	lungh.	largh.	prof.
17	8	9	1200	10	4
24	13	12	x	8	5

Poi si stabiliranno le seguenti proporzioni

$$\begin{aligned}
 17:24::1200:x', \\
 8:13::x':x'', \\
 9:12::x'':x''', \\
 8:10::x''':x'', \\
 5:4::x'':x,
 \end{aligned}$$

le quali derivano dal seguente ragionamento. Si supponga in primo luogo che tutte le altre cose sieno eguali all'infuori del numero degli uomini, e si dirà: se 17 uomini hanno cavato 1200 palmi di canale, quanto ne caveranno 24 uomini? E poi: se lavorando per 8 giorni si cava una lunghezza x' , quanto se ne caverà lavorando per 13 giorni? In seguito: se travagliando 9 ore al giorno si cava una quantità di canale rappresentata da x'' , quanta se ne caverà travagliando 12 ore al giorno? Fin qui le ragioni son tutte dirette, perchè crescendo il tempo e gli uomini si ottiene più lavoro. Si dirà in seguito: se facendo il canale di 10 palmi se ne cava una lunghezza x''' , volendolo di largh. 8 palmi quale lunghezza si potrà cavare? Qui la ragione è inversa, giacchè quanto più grande è la larghezza tanto più piccola sarà la lunghezza. Finalmente: se si ha la lunghezza x'' quando la profondità è 4 palmi, volendolo fare di

profondità pal. 5 quale lunghezza si potrà cavare? In questo caso anche la ragione è inversa, perchè crescendo la profondità deve diminuir la lunghezza. Questo ragionamento dimostra la giustezza delle stabilite proporzioni. Moltiplicandole per ordine e omettendo nel secondo rapporto tutti i fattori comuni x' , x'' , x''' , x'''' , si avrà

$$17 \times 8 \times 9 \times 8 \times 5 : 24 \times 13 \times 12 \times 10 \times 4 :: 1200 : x$$

e quindi

$$x = \frac{24 \times 13 \times 12 \times 10 \times 4 \times 1200}{17 \times 8 \times 9 \times 8 \times 5};$$

la quale espressione si può metter sotto quest'altra forma

$$x = \frac{24}{17} \times \frac{13}{8} \times \frac{12}{9} \times \frac{10}{8} \times \frac{4}{5} \times 1200.$$

Osservando questo valore si trova, che $\frac{24}{17}$ è il rapporto diretto del numero degli uomini, $\frac{13}{8}$ è il rapporto diretto de' giorni, $\frac{12}{9}$ quello delle ore di lavoro, $\frac{10}{8}$ è l'inverso del rapporto delle larghezze de' canali, che secondo l'enunciato avrebbe dovuto essere $\frac{8}{10}$, e che $\frac{4}{5}$ è parimenti il rapporto inverso delle profondità de' canali. Si può dunque, nel risolvere siffatti problemi, osservar la seguente regola. *Si dispongono i dati del problema in due linee come è stato fatto più sopra. Si formano tutti i rapporti o diretti o inversi che risultano da' termini relativi alle circostanze del problema; l'incognita sarà eguale al prodotto di tutti questi rapporti e del termine solitario.*

Il valore di x del problema precedente si rende più semplice sopprimendo i fattori comuni prima di effettuare le moltiplicazioni. In fatti, si ottiene da prima

$$x = \frac{3}{17} \times \frac{13}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times 1200,$$

che riducesi finalmente a

$$x = \frac{13 \times 4}{17} \times 1200 = 3670 \frac{10}{17}.$$

Non bisogna in casi simili dimenticar questa pratica, che rendendo il calcolo più semplice, lo rende anche più

breve e meno soggetto ad errori : principali oggetti da aversi in mira in ogni calcolazione.

§. III. *Della Regola congiunta.*

178. Questa regola ha grandissima relazione con quella del tre composta. La quistione seguente sarà bastante a farne conoscere l'oggetto.

XI. Una persona vuol cambiare del zucchero in pepe. Conoscendo che 20 libbre di zucchero si possono cambiare con 13 di caffè, 25 libbre di caffè con 12 di cannella, 2 libbre di cannella con 5 libbre di tè, e 6 libbre di tè con 7 libbre di pepe; si vuol sapere quanto pepe può aversi per 32 libbre di zucchero.

Chiamando x la quantità di pepe richiesta, e x' , x'' , x''' le quantità di caffè, cannella, e tè che sarebbero rispettivamente eguali alle 32 libbre di zucchero, è evidente che si potranno stabilire le proporzioni seguenti:

$$20 : 13 :: 32 : x',$$

$$25 : 12 :: x' : x'',$$

$$2 : 5 :: x'' : x''',$$

$$6 : 7 :: x''' : x.$$

Moltiplicandole, termine per termine, e omettendo di scrivere i fattori comuni x' , x'' , x''' , si avrà

$$20 \times 25 \times 2 \times 6 : 13 \times 12 \times 5 \times 7 :: 32 : x;$$

d' onde ricavasi

$$x = 32 \times \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{6} = 29 \frac{1}{11},$$

cioè libbre 32 di zucchero valgono quanto libbre $29 \frac{1}{11}$ di pepe.

Per risolvere questa quistione si poteva ancora impiegare un ragionamento diverso ma conducente al medesimo scopo. Di fatto se 20 libbre di zucchero equivalgono a 13 di caffè, 1 libbra di zucchero sarà eguale a una quantità di caffè espressa da $\frac{13}{20}$ di libbra. Per la stessa ragione 1 libbra di caffè sarà

eguale a libbre $\frac{12}{11}$ di cannella; e così per gli altri. Si avrà dunque

$$1 \text{ lib. di zucc.} = \text{lib. } \frac{12}{11} \text{ di caf.,}$$

$$1 \text{ lib. di caf.} = \text{lib. } \frac{12}{11} \text{ di can.,}$$

$$1 \text{ lib. di can.} = \text{lib. } \frac{1}{2} \text{ di tè,}$$

$$1 \text{ lib. di tè.} = \text{lib. } \frac{1}{2} \text{ di pepe.}$$

Per conseguenza si troverà la quantità di cannella che equivale a 1 libbra di zucchero prendendo i $\frac{12}{11}$ di $\frac{12}{11}$; e così per gli altri. Si avrà in generale

$$1 \text{ lib. di zuc.} = \text{lib. } \frac{13}{20} \text{ caf.} = \text{lib. } \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \text{ can.}$$

$$= \text{lib. } \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \text{ tè} = \text{lib. } \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{6} \text{ pepe.}$$

E quindi

$$32 \text{ lib. di zuc.} = 32 \times \frac{13}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{6} \text{ lib. di pepe:}$$

risultamento identico al precedente.

In qualunque modo si ragioni, si vede: 1° che la regola ha per oggetto di trovare la quantità di una cosa che equivalga ad una quantità data di un'altra di diverso genere, conoscendosi una serie di rapporti fra cose di diverso genere, ne' quali quelle da paragonarsi occupano gli estremi; 2° che si risolve il problema, moltiplicando fra loro i rapporti che legano le due quantità da paragonarsi, e formandone un rapporto composto che si moltiplicherà pel termine della domanda, cioè per la quantità data di cui si cerca l'equivalente.

179. Questa regola si applica più frequentemente al cambio delle monete. Eccone un esempio.

XII. Si tratta di convertire in lire sterline una somma di ducati 2000 di Napoli, sapendo che 55 ducati di Napoli equivalgono a 43 scudi romani, che 5 scudi fanno 29 franchi, che 13 franchi fanno 5 fiorini, che 87 fiorini equivalgono a 11 federici di Prussia, che 589 federici fanno 195 imperiali di Russia, che 38 imperiali fanno 63 lire sterline (*).

(*) Questi rapporti non sono esatti, essendosi supposti a solo oggetto

Chiamando x la quantità di lire sterline equivalente alla somma di ducati 2000, si avrà secondo la regola.

$$x = 2000 \times \frac{43}{55} \times \frac{29}{5} \times \frac{5}{13} \times \frac{11}{87} \times \frac{195}{389} \times \frac{63}{38}.$$

Sopprimendo i fattori comuni, si ottiene

$$x = 2000 \times \frac{43 \times 63}{389 \times 38},$$

ovvero

$$x = 2000 \times \frac{2709}{14782},$$

e in fine

$$x = 366 \frac{3894}{7391} \text{ lire sterline.}$$

E siccome 1 lira sterlina si divide in 20 *scellini*, uno scellino in 12 *pences*, 1 *pence* in 4 *farthings*, sarà prossimamente

$$x = 366^{\text{tir. st.}} 10^{\text{scel.}} 6^{\text{pen.}} 2^{\text{fart.}};$$

la qual somma equivale a 2000 ducati di Napoli.

La frazione $\frac{2709}{14782}$ esprime il rapporto che il ducato ha colla lira sterlina. Convertendola in decimali, si ha 0,183263... che è il numero per lo quale bisognerebbe moltiplicare una somma di ducati per convertirla in lire sterline. Viceversa il rapporto $\frac{14782}{2709} = 5,4566...$ servirebbe per convertire in ducati una somma qualunque di lire sterline.

§. IV. Problemi d'interesse, e Regola di sconto.

180. Il danaro può esser impiegato o per l'acquisto di un podere, o per una speculazione commerciale, o per lo stabilimento di una manifattura, ec. Allorchè il danaro è bene impiegato, alla fine di un certo tempo si ottiene un prodotto componente una somma maggiore della primitiva. Ma per po-

di proporre un esempio di questo genere. Del resto i rapporti tra le monete variano a seconda del *cambio*, il quale dipende da diverse circostanze commerciali.

ter conseguire questo intento, è necessario che il danaro si trovi nelle mani di chi sa renderlo un capitale produttivo.

Avviene spesso che chi possiede i mezzi da impiegare il danaro in un modo produttivo manca di capitale; allora prende il danaro in prestito. In questo caso è necessario ch'egli si obblighi dopo un certo tempo non solo di restituire per intero la somma ricevuta, ma anche di aggiungervi un'altra somma che serve a compensare il prestatore de' vantaggi che avrebbe egli ritirato se avesse direttamente impiegato il suo capitale. La somma che si dà in prestito si chiama *capitale o sorte principale*, la somma che si paga di soprappiù per vantaggio del prestatore si chiama *frutto o interesse*.

L'interesse ordinariamente si calcola al tanto per 100. all'anno; così dicendo al 6 per 100 s' intende che per ogni 100 ducati si ha in un anno il frutto di 6 ducati, cioè che se uno prestasse ducati 100, dopo un anno dovrebbe ritirarne 106.

Tutti i problemi d'interesse si risolvono colla regola del tre (n° 171). Per es. si domandi quanto sarà il frutto di ducati 384 al 6 per 100. Si farà le proporzione

$$100 : 6 :: 384 : x.$$

Osservando che il primo rapporto si può ridurre a quello di 1 : 0,06, si avrà subito $x = 384 \times 0,06 = 23,04$. Ma 0,06 è l'interesse di un ducato; perciò si ottiene l'interesse di una data somma moltiplicandola per l'interesse di un ducato.

Si otterrà sempre ne' problemi di questa natura che uno dei termini della proporzione sia 1, qualora l'interesse si prenda sull'unità; in questo caso la ricerca del termine incognito si riduce ad una moltiplicazione o ad una divisione.

181. Se si cercasse il capitale corrispondente ad una data rendita, siccome il frutto è il prodotto del capitale per l'interesse di un ducato (n° prec.), per ottenere la sorte principale bisogna dividere la rendita data per l'interesse di un ducato. Per conseguenza il capitale corrispondente ad una rendita di duc. 64 al 5 per 100 è espresso da $\frac{64}{0,05} = 1280$.

182. Se si cercasse quanto vale dopo un anno la somma di 752 ducati al 6 per 100, si dirà: se 100 ducati divengono 106

dopo un anno, quanto diverranno 384 ducati? il che dà luogo alla seguente proporzione:

$$100:106::384:x, \text{ ovvero } 1:1,06::384:x,$$

da cui $x = 384 \times 1,06 = 407,04$. Si ottiene dunque il valore di una somma dopo un anno moltiplicandola per l'unità accresciuta del suo interesse.

Viceversa, se volesse sapersi quanto vale attualmente una somma da ritirarsi dopo un anno, bisogna evidentemente dividerla per l'unità più il frutto corrispondente all'unità. Per es., la somma di duc. 358 da ritirarsi dopo un anno non vale attualmente (l'interesse al 6 per 100) che $\frac{358}{1,06} = 337,73$.

In generale supponendo che il possessore di una somma di danaro abbia sempre e prontamente il mezzo da impiegarla, allorchè non ne può disporre che dopo un certo tempo, il suo valor *reale* è minor del valor *nominale*; in guisa che il possedere anticipatamente una somma fa crescer il suo valor reale.

183. Se il tempo che deve scorrere fosse minore di un anno, siccome nell'enunciato l'interesse suol rapportarsi all'anno, per mezzo di una proporzione si troverebbe l'interesse corrispondente all'epoca data.

Si domandi per es. quanto varrà la somma di duc. 581 da ritirarsi dopo 8 mesi al 6 per 100. Si dirà: se per un anno o 12 mesi l'interesse è 6, per 8 mesi quanto sarà? il che dà luogo alla proporzione $12:8::6:x = \frac{4}{3} = 4$. La somma 581 da ritirarsi dopo 8 mesi varrà attualmente $\frac{581}{1,04}$.

184. Allorchè il tempo dopo il quale deve pagarsi o ritirarsi una data somma passa l'anno, ordinariamente si calcola l'interesse anche sull'interesse. Per es. la somma 500 al 6 per 100 dopo un anno diviene $500 \times 1,06$ ossia 530; questa somma alla fine del secondo anno sarà divenuta $530 \times 1,06$, ossia $500 \times 1,06 \times 1,06$; alla fine del terzo sarà $500 \times 1,06 \times 1,06 \times 1,06$; ec. e ben si vede che bisogna moltiplicare tante volte la somma primitiva pel capitale più l'interesse corrispondente all'unità, per quanti anni sono decorsi.

Al contrario, se vuol sapersi quanto vale attualmente una

somma da ritirarsi dopo un certo numero di anni, bisogna dividerla tante volte pel capitale 1 più il suo interesse, per quanti anni debbono scorrere. Così la somma 690 da ritirarsi dopo 3 anni, calcolando l'interesse al 6 per 100, non vale attualmente che $\frac{690}{1,06 \times 1,06 \times 1,06} = 579,34$.

Moltiplicando più volte di seguito una somma qualunque per 1,06, si troverà che si raddoppia dopo 12 anni circa; quindi una somma da ritirarsi dopo anni 12 non vale attualmente che circa la metà.

185. Dicesi *cambiale* una carta nella quale un negoziante promette il pagamento di una somma ad un'epoca determinata. Se il possessore della cambiale vuol ricever la somma prima del tempo, ossia prima della *scadenza*, colui che sborsa il danaro non deve dare l'intera somma, ma una minore, affinchè nel rimborso della somma contenuta nella cambiale egli ritrovi il suo capitale e il frutto corrispondente. La somma che il negoziante ritiene sulla cambiale, in commercio si chiama *sconto*; e i problemi seguenti son relativi alla *regola di sconto*.

XIII. Una cambiale di duc. 370 deve scontarsi al 6 per 100 4 mesi prima della scadenza; quanto deve pagare il banchiere che riceve la cambiale?

Siccome 370 è una somma che deve ritirarsi dopo 4 mesi, attualmente non varrà che $\frac{370}{1,02}$ ossia 362,74 (n° 181); e questa è la somma che deve sborsarsi dal banchiere.

Si può anche proporre sullo sconto il problema inverso, del genere di quello che segue.

XIV. Per una cambiale di 689 pagabile dopo 9 mesi si è pagata attualmente la somma di duc. 650, a qual ragione è stata scontata la cambiale?

È chiaro che siccome la somma 689 divisa pel capitale 1 più l'interesse deve dare la somma sborsata, dividendo 689 per 650 si dovrà avere il capitale 1 più l'interesse. Ora $\frac{689}{650} = 1,06$, in conseguenza l'interesse di un ducato per 9 mesi è 0,06; e per un anno sarà 0,08, ossia l'interesse è stato all'8 per 100.

Si poteva anche dividere l'eccesso di 689 sopra 650, cioè 39 per 650, e si sarebbe ottenuto immediatamente 0,06.

§. V. Regola di Società.

186. Basterà il seguente problema per mostrare l'oggetto di questa regola, e l'origine del nome.

XV. Tre persone hanno riunito i loro capitali per fare un negozio. Il primo ha messo ducati 2700, il secondo ducati 3700, il terzo ducati 3200. Hanno guadagnato 2574 ducati; si domanda qual porzione di guadagno spetta a ciascuno.

Riunendo i tre capitali si ha il capitale totale 9600. Ora è chiaro che se uno avesse messo la metà del capitale avrebbe dritto alla metà del guadagno, se la terza parte del capitale avrebbe dritto alla terza parte del guadagno, ec. Dunque il rapporto che il capitale di ciascuno ha col capitale totale dev'esser eguale al rapporto che il guadagno di ciascuno ha col guadagno totale. Chiamando x, y, z i guadagni di ciascuno, si avranno le seguenti proporzioni:

$$9600 : 2700 :: 2574 : x,$$

$$9600 : 3700 :: 2574 : y,$$

$$9600 : 3200 :: 2574 : z.$$

Da queste proporzioni, ricavando i valori di x, y, z , si ha $x = 723,93\frac{1}{2}$, $y = 992,06\frac{1}{2}$, $z = 858$.

Osservando le proporzioni di sopra, si vedrà che gli antecedenti sono comuni; sicchè permutando diverranno

$$9600 : 2574 :: 2700 : x,$$

$$9600 : 2574 :: 3700 : y,$$

$$9600 : 2574 :: 3200 : z,$$

le quali hanno di comune il primo rapporto. Questo primo rapporto può mettersi sotto la forma $1 : \frac{2574}{9600}$ e allora non si tratterà che di moltiplicare i capitali parziali per $\frac{2574}{9600} = \frac{439}{1600}$; dal che si ricava che dividendo il guadagno totale pel capitale totale, si ha un *modulo* pel quale moltiplicando tutti i capitali parziali si hanno i guadagni parziali. Per es. se i capitali sono 131, 147, 188, 394, 253, ec.; il capitale totale 8534, e il guadagno totale 794, si ottengono tutti i guadagni parziali moltiplicandoli per $\frac{794}{8534} = 0,09304$. Questo nu-

mero che esprime il guadagno spettante per ogni ducato di capitale dev'esser preso con tanto maggior numero di cifre decimali, quanto più grandi sono i capitali parziali.

187. È importante per l'esattezza de' risultamenti e per la brevità del calcolo che i capitali parziali non sieno molto grandi. Nelle grandi associazioni in vece del ducato si prende per unità un numero rotondo sufficientemente grande che può esser 50, 100, 200, ec. la quale unità si chiama *azione* o *messa*. I Socii dovendo metter nel negozio de' capitali che sien multipli dell'azione, il guadagno si riferirà al numero delle azioni e non al capitale; dal che risulta che il numero delle azioni essendo molto minore della somma effettiva, il modulo può esser preso con minor numero di cifre decimali. Per es. si tratti di una Società in cui le azioni sono di ducati 200, e i capitali de' Socii sieno 1600, 1800, 3200, ec., si vede che le azioni saranno rispettivamente 8, 14, 16, ec.; e se il capitale è 80000 e il guadagno 4720, siccome il capitale contiene 400 azioni, il modulo per cui bisogna moltiplicare il numero delle azioni di ciascun Socio per aver il guadagno rispettivo sarà $\frac{4720}{400} = 11,80$.

188. Qualche volta avviene che i capitali non sono tenuti in commercio per la stessa durata di tempo, e si domanda il guadagno di ciascuno tanto per ragion del tempo quanto pel valore del capitale. È facile in questo caso ridurre il problema al precedente, riportando tutti i capitali alla stessa unità di tempo.

Supponiamo che A abbia messo in società ducati 300 per 7 mesi, B ducati 460 per 5 mesi, e C ducati 800 per 9 mesi. È chiaro che tanto è mettere ducati 300 e tenerli per 7 mesi, quanto è mettere un capitale sette volte più grande e tenerlo per un mese; così pel secondo, tanto è un capitale 460 tenuto per 5 mesi, quanto un capitale quintuplo tenuto per un mese. E perciò nella quistione proposta i capitali de' tre soci tenuti per un mese sono 2100, 2300, 7200. Dopo di ciò si segue la regola.

La somma di tutti i guadagni parziali dovendo esser uguale al guadagno totale, si può ottenere l'ultimo guadagno, sottraendo dal guadagno totale la somma di tutti quelli ottenuti. Sarà però meglio trovarli tutti, e far la somma de' guadagni parziali per assicurarsi dell'esattezza delle operazioni.

189. Dal fin quì detto si rileva che questa regola ha per oggetto di dividere un numero dato in parti che abbiano tra loro de' rapporti dati. Per es. nel primo problema si tratta di dividere il numero 2574 in tre parti che sien fra loro come i tre numeri 2700, 3700, 3200. Chiamando x, y, z , queste tre parti, dev'esser $2700 : 3700 : 3200 :: x : y : z$. Ma in una serie di rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente a un conseguente (n° 168), e osservando che la somma delle tre parti x, y, z , dev'esser eguale a 2574, si avrà come sopra

$$9600 : 2700 :: 2574 : x,$$

cc.

A questa regola dunque si riferiscono tutti i problemi ne' quali, senza entrar per lo mezzo le società, il commercio o i negozi, si tratta di dividere un numero in parti che sieno fra loro in dati rapporti. Ecco un altro problema di questa natura.

XVI. Si deve dividere un' eredità di ducati 30000 fra quattro eredi, in modo che il secondo abbia $\frac{1}{4}$ della porzione del primo, il terzo abbia $\frac{2}{3}$ della porzione del secondo, e il quarto abbia il terzo della somma delle porzioni del primo e del terzo.

È chiaro che la parte del terzo paragonata a quella del primo ne sarà $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{4}$ cioè $\frac{1}{12}$, e la parte del quarto paragonata pure a quella del primo sarà il terzo di $1 + \frac{1}{12}$, cioè $\frac{13}{36}$. Le parti che spettano a ciascuno saranno fra loro come i numeri 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{13}{36}$, e riducendo allo stesso denominatore saranno come i numeri

$$\frac{96}{96}, \quad \frac{72}{96}, \quad \frac{63}{96}, \quad \frac{53}{96},$$

ovvero come i numeri 96, 72, 63, 53. La loro somma è 284. Si avranno dunque le porzioni di ciascuno prendendo le parti

$\frac{96}{284}, \frac{72}{284}, \frac{63}{284}, \frac{53}{284}$ di 30000, ovvero moltiplicando i numeri 96, 72, 63, 53 pel modulo $\frac{30000}{284} = 105,6338$, il che darà le somme dovute agli eredi secondo la distribuzione prescritta, cioè

$$10140,84, \quad 7605,63, \quad 6654,93, \quad 5598,59.$$

§. VI. Della regola di alligazione.

190. Questa regola ha per oggetto di trovare il valor medio di più cose dello stesso genere ma di prezzi diversi, conoscendo il numero e il valore di ciascuna specie. Ecco un problema.

XVII. Un mercante possiede del vino di diverse qualità, cioè

130	bottiglie a grana 10 l'una,
120	a grana 8,
250	a grana 13,
605	a grana 12 ;

mescolandole, vuol sapere a quanto riviene il prezzo di una bottiglia del vino mescolato. È chiaro che

130	bottiglie a 10 grana l'una	costano	1300	grana
120	a 8		960	
250	a 13		3250	
605	a 12		7260	

dunque 1105 bottiglie..... costano 12770

Dividendo 12770 per 1105 si ha 11,55 che sarà il prezzo di una bottiglia del miscuglio.

Si potrebbe su questa regola proporre il problema inverso. Per es. avendosi del vino di 10, 12, 8 grana la bottiglia, si vuol sapere qual porzione si deve prender di ciascuna specie per formare una miscela che costi grana 9 la bottiglia. Ma questo problema non può risolversi senza il soccorso dell'algebra.

191. Il nome di regola di alligazione deriva dall'essersi essa applicata in origine al miscuglio de' metalli che con termine proprio si chiama *lega*. L'oro e l'argento impiegato per oggetti di commercio non si trova mai puro, ma vi si mescola una porzione di rame che si chiama la *lega*. Il rapporto tra il peso totale e il peso della parte di fino si chiama *titolo*. Si dice dunque che una massa d'argento è a $\frac{9}{10}$ di fino, ovvero al titolo $\frac{9}{10}$, quando per ogni unità di peso, si contengono $\frac{9}{10}$ di argento puro. Parimenti quando si dice che il

titolo delle monete di oro è 996 millesimi, s'intende che per ogni unità di peso vi sono $\frac{996}{1000}$ di oro puro, o che in 1000 parti 996 son di oro puro. Ecco un problema relativo alla lega de' metalli.

XVIII. Si vogliono fondere tre verghe di argento, la prima del peso di 14 libbre e del titolo 0,854, la seconda di 11 libbre e del titolo 0,852, la terza di 18 libbre e del titolo 0,894. Si vuol sapere quale sarà il titolo della miscela.

Ora si ha dell'enunciato

$$\begin{array}{rcl}
 14^{\text{lb.}} & \text{a } 864 \text{ millesimi} & \text{fanno } 14 \times 0,864 = 12,096 \\
 11^{\text{lb.}} & \text{a } 852 \text{ mill.} & \text{fanno } 11 \times 0,852 = 9,572 \\
 18^{\text{lb.}} & \text{a } 894 \text{ mill.} & \text{fanno } 18 \times 0,894 = 16,092 \\
 \hline
 43 & & 37,560
 \end{array}$$

Dunque nelle 43 libbre del miscuglio si contengono 37,56 libbre di argento puro. E perciò il titolo del miscuglio sarà $\frac{37,56}{43}$, ovvero 0,873, ossia che per ogni libbra del miscuglio si contengono 873 millesimi di fino.

192. Trattandosi di misurare la distanza fra due punti assai lontani, per quanta cura si porti nella operazione, vi è sempre da dubitare dell'esattezza del risultamento, a causa degli errori che possono provenire dalla ripetizione delle misure parziali e da tante altre cause. Si costuma allora di ripetere più volte l'operazione, e quando s'incontrano de' risultamenti diversi, non essendovi ragione di creder esatto l'uno piuttosto che l'altro, si prende un medio fra essi.

Supponiamo a modo di esempio che misuratasi la distanza fra due punti siasi trovata due volte eguale a pal. 5434,32, che tre volte siasi trovata di pal. 5433,98, e che finalmente due altre volte siasi rinvenuta di pal. 5434,13. È chiaro che per aver il risultamento medio, si ripeterà due volte la prima misura, tre volte la seconda, due volte la terza, e poi si dividerà la somma per 7. Si ha dunque

$$\begin{array}{rcl}
 2 \times 5434,32 & = & 10868,64 \\
 3 \times 5433,98 & = & 16301,94 \\
 2 \times 5434,13 & = & 10868,26 \\
 \hline
 \text{in tutto} & & 38038,84
 \end{array}$$

Dividendo questa somma per 7, si ha per misura media 5434,12.

C A P O IX. (*)

DELLE MISURE.

193. Valutare una cosa significa determinarne il *valore*. Due oggetti hanno il medesimo valore, quando tutti gli uomini consentono a permutare l'uno nell'altro. Se due canne di panno si trovano a cambiare con 10 tomoli di grano, queste due cose avranno lo stesso valore.

Per taluni oggetti il valore è individuale e non cresce che col numero. Per es. se un cavallo costa 40 ducati, due cavalli costeranno 80, ec. Per altri oggetti il valore dipende da un elemento che bisogna misurare.

Misurare una cosa vuol dire determinare quante unità sono necessarie per comporla. L'unità dovendo esser una grandezza della medesima specie di quella da misurarsi, vi dovranno esser tante specie di unità per quante sono le cose che si valutano a *misura*. Gli elementi misurabili che possono entrare nella valutazione di una cosa sono l'estensione, il peso ed il tempo; vi saranno perciò tre classi di misure: di estensione, di peso e di tempo. Ma l'estensione potendo esser di una, di due o di tre dimensioni, le relative unità di misura saranno pure di tre specie diverse. Può inoltre l'unità variare nella grandezza e nelle suddivisioni relativamente all'uso cui le misure son destinate.

Ecco il quadro contenente le diverse classi di misure delle quali si può aver bisogno, insieme colle distinzioni cui l'uso o il comodo delle società può dar luogo intorno alla grandezza dell'unità e al modo di dividerla.

(*) Ciò che precede contiene le più importanti teoriche da doversi trattare in *Aritmetica*. Con gli esposti principii si potrà risolvere qualsivoglia quistione dipendente dalle quattro operazioni fondamentali e dalle proporzioni, ed eseguire il calcolo numerico corrispondente. Aggiungiamo ciò non pertanto un Capitolo sulle misure, che contiene diverse importanti notizie nel tempo stesso che presenta delle utili applicazioni delle cose precedenti. Preveniamo però il lettore che per intenderlo in tutta l'estensione è necessario riserbarne lo studio dopo aver appreso gli elementi di *Geometria*.

Misure di	estensione	lineari	{ per gli usi comuni itinerarie
		superficiali	{ per gli usi comuni agrarie
		solide	{ di volume pe' corpi duri di capacità { per gli aridi pe' liquidi
	peso	{ per le grandi masse per gli usi comuni per gli oggetti preziosi	
	tempo	{ per gli usi civili pel moto in Meccanica	

Oltre queste misure vi è la moneta che serve a misurare il valor relativo di due oggetti qualunque paragonati nello stesso luogo e alla stessa epoca. Perciò se in un paese un cavallo costa 50 scudi, e un bue 20, si dirà che il valor del cavallo sta a quello del bue come 50 : 20 o come 5 : 2; sicchè 5 buoi e 2 cavalli avranno lo stesso valore.

194. Le misure di superficie e di volume dipendono dall'unità lineare. La loro determinazione è una conseguenza delle proprietà di cui gode la figura che comprende l'area o il volume da misurarsi.

Quanto alle aree, il calcolo che ne dà la misura riducesi sempre a formare il prodotto di due fattori che rappresentando le misure di due linee si possono riguardare come la base e l'altezza di un rettangolo. Per intender qual sia il senso da assegnarsi a questo prodotto e per qual ragione dia la misura del rettangolo, bisogna osservare che due rettangoli stanno fra loro in ragion composta delle basi e delle altezze (*). Quando queste rette sono espresse o date in numeri, la suddetta ragion composta si ottiene facendo il prodotto de' termini corrispondenti de' rapporti semplici (n° 169), d'onde risulta

(*) V. Euclide, Prop. 23, Lib. VI.

che le due aree rettangolari stanno fra loro come i prodotti de' numeri che rappresentano le loro due dimensioni. Or se un rettangolo si paragona al quadrato che ha per lato l'unità, un termine del rapporto sarà 1, e l'altro esprimerà il rapporto che il rettangolo ha col quadrato che ha per lato l'unità. D'onde si conchiude, che preso questo quadrato per unità, il prodotto de' numeri che rappresentano quante volte l'unità lineare è contenuta ne' due lati del rettangolo, ne sarà la misura. Per es. se un lato del rettangolo è 8 palmi e l'altro 5, il prodotto 40 esprime che desso si compone di 40 quadrati che hanno per lato l'unità o in altri termini di 40 palmi quadrati.

Quando trattasi di volume, la sua determinazione dipende dal prodotto di tre fattori che si possono considerare come i tre lati o le tre dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, di cui il prodotto stesso ne è la misura. Giacchè due parallelepipedi rettangoli stanno fra loro in ragion composta delle loro tre dimensioni; e se queste sono espresse in numeri, la suddetta ragion composta riducendosi a moltiplicare i tre antecedenti fra loro, e i tre conseguenti fra loro, i due parallelepipedi staranno come il prodotto de' numeri che rappresentano i tre lati del primo al prodotto de' numeri esprimenti i tre lati del secondo. Se dunque si paragona un parallelepipedo rettangolo al cubo formato sull'unità lineare, il rapporto di questi due solidi sarà come quello del prodotto delle tre dimensioni del parallelepipedo all'unità. E quindi, secondo l'idea assegnata alla parola misurare, il prodotto suddetto diverrà la misura del parallelepipedo, e il cubo fatto sull'unità lineare sarà l'unità cubica. Così se i tre lati di un parallelepipedo rettangolo sono 5, 8, 3, il prodotto 120 ne è la misura perchè esprime che desso si compone di 120 unità cubiche, o di 120 cubi che hanno per lato l'unità lineare.

Faremo qui di passaggio avvertire che si chiama potenza di un numero il prodotto che risulta moltiplicando questo numero più volte per sè stesso; e si chiama poi seconda, terza, quarta, ec. potenza quella in cui il numero entra 2, 3, 4, ec. volte come fattore. Perciò 4 è la seconda potenza di 2, 8 ne è la terza, ec. La seconda e la terza potenza di un numero, per la proprietà che hanno di rappresentar rispettivamente la misura del quadrato e del cubo, si chiamano *quadrato* e *cubo*. Si dice perciò che 27 è il cubo di 3, che 16 è il quadrato di 4. Le misure di superficie e di volume per

la medesima ragione si chiamano anche *quadratiche* e *cubiche*.

195. Le misure di estensione e di peso entrando in quasi tutte le relazioni commerciali, in ciascun Paese si trova stabilita dalle leggi Amministrative la grandezza dell'unità ad esse relativa e il modo come dividerla; nè la permutazione degli oggetti di egual valore avrebbe il carattere di sicurezza necessario, se l'elemento valutabile non si misurasse per mezzo di campioni garentiti dal Governo.

Affinchè queste misure formassero un *sistema*, converrebbe, che le suddivisioni e i multipli dell'unità procedessero colla medesima legge e fossero sempre uniformi; che tutte dipendessero dall'unità lineare con rapporti espressi in numeri semplici e facili a ritenersi; e che l'unità lineare dipendesse pure da qualche misura naturale invariabile. La prima condizione darebbe uniformità e semplicità al calcolo. La seconda, oltre al metter tutti gli uomini nella suscettibilità di comprendere il legame che passa fra le misure e di valersene al bisogno, dispenserebbe dal bisogno di conservare per ciascuna misura il campione dell'unità. La terza condizione dando alle misure il carattere d'invariabilità, renderebbe possibile il rettificarle, qualora pel grandissimo numero delle copie che se ne fanno si venissero ad alterare, e offrirebbe il mezzo di rinvenirle in ogni tempo qualora per volger di secoli si perdessero i campioni. Si conseguirebbe il massimo vantaggio, se le misure seguissero la divisione decimale, perchè allora il calcolo da farsi per la valutazione degli oggetti rientrerebbe in quello degli interi.

Ma disgraziatamente le attuali misure mancano di tutte o quasi tutte queste condizioni; e variano nella grandezza e nelle suddivisioni non solo da Regno a Regno, ma anche da paese a paese di un medesimo Regno. Ed il più sorprendente è che le superficie e i volumi la cui determinazione si ottiene per mezzo dell'unità lineare, spesso si rapportano ad un'unità diversa da quella che ha per lato l'unità lineare. Anzi le misure di capacità hanno ordinariamente per unità una misura che, non avendo nessuna relazione coll'unità lineare, non può esser espressa esattamente per mezzo dell'unità cubica. Il qual gravissimo inconveniente, che spesso si accoppia a quello di dare a' vasi delle forme difficili a misurarsi, toglie il vantaggio di poter determinare il contenuto de' vasi

col mezzo delle sue dimensioni e della sua forma, ricorrendosi all'altro di vuotarli o di riempirli, che nella vendita in grande de' liquidi riesce sempre imbarazzante, spesso impraticabile.

Queste circostanze tutte non solo contribuiscono ad allungare considerevolmente i calcoli, ma rendono difficili ed incerte le operazioni di commercio interno ed esterno; giacchè in tanta varietà di misure è ben difficile determinarne i rapporti esatti, allorchè queste non possono paragonarsi ad una misura comune invariabile.

196. Oltre le misure di estensione e di peso altre ve ne sono che potrebbero chiamarsi *convenzionali*, sulle quali il Governo non prende ingerenza, o perchè di loro natura non possono esser alterate e divenir mezzi di frode, o perchè non entrano direttamente ne' negozi, o perchè riguardano solamente una classe particolare di persone.

A R T. I.

Esposizione delle principali misure in uso.

§. I. *Misure convenzionali.*

197. Il ritorno periodico de' fenomeni relativi al moto apparente del Sole intorno alla terra ha somministrato gli elementi per la misura del *tempo*.

Chiamasi *giorno* l'intervallo di tempo che passa da che il Sole abbandona un meridiano fino a che vi ritorna, o in altri termini l'intervallo da un mezzogiorno all'altro o da una mezza notte alla seguente. Presso tutte le nazioni incivilite si divide attualmente in 24 ore, l'ora in 60 minuti, il minuto primo in 60 secondi. S'indica nel modo esposto al n° 106.

Nella vita civile s'impiega la parola giorno per esprimere il tempo della presenza della luce; sicchè può chiamarsi *giorno naturale* l'intervallo in cui il Sole sta sull'orizzonte e *notte* quello che passa dal tramontare al sorgere del Sole. Il giorno naturale avendo una durata variabilissima non potrebbe servir di misura al tempo. Ma il giorno naturale e la notte formano costantemente 24 ore.

Il Sole cangia ogni giorno la sua posizione nel Cielo, e

ritorna allo stesso sito in un intervallo di circa 365 giorni, che dicesi *anno*.

Cento anni formano un *secolo*. Questo periodo così lungo impiegato qualche volta per la misura del tempo non ha nessuna relazione co' fenomeni celesti; ma è un multiplo arbitrario dell'anno come arbitraria è la divisione del giorno in 24 ore.

L'anno si divide in 12 mesi. L'ineguaglianza nella loro lunghezza non potrebbe far servir il mese per misura del tempo; a meno che non si considerassero tutt' i mesi composti di 30 giorni, come si ha costume di far in commercio (*).

(*) Affinchè meglio si comprenda che cosa sia il giorno e l'anno, i due principali elementi per la misura del tempo, esporremo sul moto apparente del sole quelle poche notizie che ci parranno più a portata di essere intese senza il sussidio del calcolo e della figura.

Si consideri il Sole fisso in un punto dello spazio immenso che comprende l'universo, e poi s'immagini la terra rivolgersi intorno ad una retta condotta pel suo centro chiamata *asse*, nel tempo stesso che si trasporta nello spazio descrivendo una curva che circonda il Sole. Il moto intorno all'asse da cui dipende la durata del giorno chiamasi *diurno*, quello lungo la curva chiamasi *annuo* per una ragione analoga.

Il cammino che segue il centro della terra nel suo moto annuo dicesi l'*orbita terrestre*, ed è una curva chiamata *ellisse* da' geometri, *ovale* in linguaggio comune. La quale si descrive piantando due stili in un piano, attaccando a' medesimi i due capi di una corda più lunga della distanza de' due punti fissi, e facendo scorrer lungo la corda, in guisa da tenerla sempre tesa, un altro stile, la cui punta segnerà sul piano la curva. I due punti fissi si chiamano i *focchi* dell'ellisse.

I centri del Sole e della Terra sono sempre nel piano dell'orbita. Ma siccome il Sole occupa uno de' fuochi, la terra non si troverà da esso sempre alla medesima distanza. E il suo moto lungo l'orbita, dipendendo dalla distanza per una legge famosa che l'osservazione e il calcolo hanno a vicenda confermata, non sarà uniforme, ma tanto più rapido quanto minore è la loro distanza.

Prima d'andare innanzi, è necessario avvertire che il moto diurno è da noi riferito a tutta la sfera celeste, a quella volta azzurra che ordinariamente chiamasi Cielo. Sicchè supponendo l'asse della terra prolungato indefinitamente, le sue estremità segneranno due punti nella sfera celeste che si chiamano i poli del Mondo. Mentre dunque la terra gira intorno al suo asse da occidente in oriente, tutta la sfera celeste apparisce muoversi in senso contrario. Il moto annuo della terra è riferito al Sole che ogni giorno apparisce accostarsi verso le stelle che sono all'oriente mentre la terra va da occidente verso oriente.

Il piano dell'orbita prolungato sino alla sfera celeste vi segna un

198. Il giorno naturale si chiama anche giornata quando si riferisce al lavoro degli operaj o ad altra opera che gli uomini debbono eseguire in piena luce. La mercede de' lavoratori si

cerchio che si chiama *ecclittica*; il sole percorre ogni giorno una parte dell' *ecclittica*.

L'asse della terra è inclinato al piano dell' *ecclittica*; ma nel suo moto si mantiene sempre parallelo. Un piano condotto pel centro della terra perpendicolare all'asse segnerà nella sfera celeste un cerchio che chiamasi *equatore*. Si supponga tirata pel centro della terra una retta perpendicolare all' *ecclittica*; i due punti ne quali incontrerà la sfera celeste sono i poli dell' *ecclittica*. L'asse del mondo e questa retta comprenderanno fra loro un angolo eguale a quello d'inclinazione del piano dell' *ecclittica* coll' *equatore*. Un piano condotto per l'asse della terra segnerà un cerchio perpendicolare all' *equatore*, che dicesi *meridiano*.

Considerandosi la terra come il centro della sfera celeste, i menzionati circoli si riportano ancora alla superficie della terra, e servono a fissare la posizione de' luoghi.

Lo spostamento della terra lungo l'orbita non essendo sensibile rispetto alle stelle atteso la loro immensa distanza, queste nel moto diurno descrivono sempre i medesimi cerchi paralleli all' *equatore*. Ma il sole, cambiando ogni giorno di sito, descrive de' cerchi più o meno lontani dall' *equatore* in ragione della maggiore o minore distanza che il punto in cui si trova la terra serba dal piano dell' *equatore*. Quando si trova nell'intersezione de' due piani, apparisce descriver l' *equatore*, poi se ne allontana per un certo tratto, indi torna indietro e passa per l'opposto punto d'intersezione; prosegue il suo cammino allontanandosi dal lato opposto, finchè ritorna al primo punto d'intersezione. Il sole intanto descriverebbe cerchi paralleli all' *equatore* se passasse per salti da uno all'altro punto dell' *ecclittica*. Per comprendere qual è in realtà il suo cammino, s'immagini in ogni istante condotta una retta dal centro della terra a quello del sole; questa segnerà un punto nel Cielo. L'insieme di tutti questi punti è la curva che il sole sembra descrivere col suo moto apparente, e che è una spirale simile a' risalti di una vite. Ma siccome le spire sono strettissime, dicesi ordinariamente che descrive cerchi paralleli all' *equatore*. È facile formarsi un'idea della curva che descrive un punto della superficie terrestre (che non sia il polo) mentre il centro descrive l' *ellisse*, considerando quella che descrive un punto della circonferenza di una ruota di carrozza nel tempo che il centro della ruota percorre una linea parallela alla strada. La curva della ruota, presa al rovescio, può dare un'idea esatta di quella descritta da un punto della superficie terrestre.

Quando il sole descrive l' *equatore*, il giorno è uguale alla notte per tutti i popoli della terra; perciò i punti d'intersezione dell' *equatore* coll' *ecclittica* si chiamano *equinozi*, e la linea che unisce gli equinozi si chiama *equinoziale*. I due paralleli fra i quali è compreso il moto del sole si chiamano *tropici*, e i punti dell' *ecclittica* cui corrispondono

paga ordinariamente a giornata; ma nel computo della spesa di un dato lavoro si prende per unità di tempo l'ora, cal-

si dicono *solstizi*, perchè ivi il Sole dovendo tornare indietro apparisce restar fermo per qualche giorno.

Ciò posto, s'immagini l'istante in cui il piano di un meridiano va ad incontrare il centro del sole e passi per una stella. Se la terra girasse solamente intorno all'asse, compiuta la sua rivoluzione, il piano del meridiano passerebbe nuovamente per la stella e pel centro del sole. Ma avendo cangiato sito rispetto al sole, è necessario che prosegua a muoversi ancora per incontrare il sole col medesimo meridiano. Si distinguono perciò che *giorni*; il *sidereo* che è il tempo di una intera rivoluzione attorno l'asse, e l'*astronomico* che è il tempo che scorre da che il sole abbandona un meridiano fino a che vi ritorna.

I giorni astronomici non son tutti eguali. L'ineguaglianza dipende da due cause: dalla non uniformità del moto della terra, e dall'inclinazione del suo asse al piano dell'eclittica. In fatti la terra, dopo compiuta la rivoluzione intorno all'asse, ha bisogno per incontrare il sole col medesimo meridiano di un tempo tanto più lungo, quanto maggiore è la porzione di orbita percorsa. Di più il moto lungo l'orbita essendo obliquo a quello diurno che si riferisce all'equatore e sul quale si misura il tempo, quando anche la terra percorresse ogni giorno eguali porzioni di orbita, queste non corrisponderebbero ad eguali porzioni di equatore. Le due suddette cause d'ineguaglianza talora sono concorrenti, talvolta opposte.

I giorni si riducono all'eguaglianza considerando l'intervallo di più giorni consecutivi e dividendolo in parti eguali. Perciò si considera il giorno *vero* ed il *medio*. La loro differenza non eccede 30".

Un orologio esattissimo, avendo un moto uniforme, segna il tempo medio; il passaggio del Sole pel meridiano segna il tempo vero. La differenza accumulandosi non monta in tre mesi al di là di 16 minuti in meno e 15 in più.

Corre la mal intesa pratica di accomodare ogni tanti giorni gli orologi per far che segnino le 12 a mezzogiorno. Si sforzano così ad andar male gli orologi che vanno bene. Sarebbe miglior consiglio tener l'orologio col tempo medio e far la correzione per mezzo delle tavole all'uso calcolate: correzione che poi non è assolutamente necessaria per gli usi civili, nè praticabile con gli orologi comuni, il cui divario per imperfezione della macchina può esser maggiore di quello che dà il sole. Il tempo vero concorda col medio in quattro tempi dell'anno, cioè verso la metà di aprile e la metà di giugno, alla fine di agosto, e a' 23 o 24 di dicembre.

In Europa generalmente si conta il principio del giorno dal mezzodì; ed abbiamo veduto che in tal caso la differenza fra l'orologio e il Sole non può sorpassare un quarto d'ora. Ma in Italia non è del tutto abbandonato l'uso di contare il principio del dì mezz'ora dopo il tramontar del Sole. Questo sistema è difettosissimo perchè la differenza

colando la giornata di 10 ore, di 12 o anche meno, secondo la stagione e la natura del travaglio.

fra un tramonto e l'altro è di qualche minuto e più, e a capo di mesi giunge a più di 3 ore e mezzo. Volendo quindi regolare un orologio all'italiana è impossibile; giacchè stabilendo il suo moto col tempo medio, si avranno giorni in cui la differenza fra l'ora segnata e l'effettiva è più di 3 ore e mezzo in più o in meno; regolandolo con una giornata d'està o d'inverno, si troverebbe nella stagione opposta il divario notevole di poco meno che otto ore fra l'orologio ed il sole. Lo stesso difetto presenterebbe il sistema di prender per principio del giorno il sorgere del sole. Il levare o il tramontare di quest'astro son due punti variabili, nè possono esser presi come il principio di un periodo che dovendo servir di misura del tempo deve aver il carattere d'invariabilità.

Chiamasi *anno* il tempo che la terra impiega per far l'intero giro dell'orbita. Ma per un fenomeno conosciuto sotto il nome di *precessione degli equinozi* la terra ritorna all'equinozio donde partì, ossia traversa il piano dell'equatore, prima di aver esaurita l'intera sua corsa. Mentre dunque la terra cammina per l'eclittica, la linea degli equinozi ha un legger moto retrogrado che viene avvertito dal cangiamento di posizione delle stelle rispetto all'equatore; sicchè il polo dell'equatore apparisce muoversi intorno a quello dell'eclittica nello stesso periodo in cui si muove la linea equinoziale. Si distinguono perciò due anni: il *sidereo* che è il tempo che la terra spende per ritornare allo stesso punto donde partì, ed è di $365^{\text{gi}} 5^{\text{ore}} 48' 49''$; ed il *tropico* o *solare* che è il tempo impiegato per ritornare allo stesso equinozio, ed è di $365^{\text{gi}} 5^{\text{ore}} 48' 49''$. Questo anno è quello su cui si regola la civil Società, dipendendo da esso il ritorno delle stagioni, la cui conoscenza è di grandissimo interesse per l'agricoltura.

L'anno civile è di 365 giorni; e per riparare alla differenza fra l'anno tropico e il civile, ogni quattro anni si aggiunge un giorno di più, e l'anno di 366 giorni si chiama *bisestile*. La quale aggiunta, stabilita da Giulio Cesare, supplirebbe al bisogno, se la differenza fosse di 6 ore. Essendo minore, fu stabilito dal Papa Gregorio XIII nel 1582 di non farsi bisestile il primo anno di tre secoli consecutivi, e far bisestile il primo del 4° secolo. Con tal correzione vengono ad aggiungersi 97 giorni in 400 anni. Questa intercalazione non compensa esattamente le $5^{\text{ore}} 48' 49''$; ma il divario non produce errore sensibile che dopo molti secoli. Gli anni bisestili dell'attual calendario son tutti quelli divisibili per 4; e degli anni secolari, quelli divisibili per 400.

Il punto equinoziale, retrocedendo ogni anno, percorre l'eclittica in 25868 anni circa. Ma un periodo così lungo, chiamato l'*anno magno*, quantunque compia un fenomeno rimarchevole nel sistema del Mondo, non può servire per la misura del tempo.

La divisione dell'anno in 12 mesi ha certamente relazione ad un altro fenomeno celeste, il moto della Luna intorno alla Terra. Il qual

Si può prender per unità di tempo, secondo l'occorrenza, il giorno, l'ora, il minuto, ec.

moto si esegue contemporaneamente a quello che la fa girare intorno all'asse, giacchè la Luna rivolge sempre lo stesso emisfero alla terra.

S'immagini un meridiano che incontri i centri della luna e del sole. Se la luna è tra la terra e il sole si dice esser in congiunzione col sole; se poi la terra si trova in mezzo, la luna è in opposizione col sole. Nella congiunzione, essendo rivolto alla terra l'emisfero oscuro, si ha il *novilunio*; nella posizione opposta il *plenilunio* perchè vediamo tutto l'emisfero illuminato. I due punti corrispondenti alla congiunzione e all'opposizione si chiamano *sigizie*. Quando la luna si trova ad egual distanza dalle sigizie, noi vediamo presso a poco la metà dell'emisfero illuminato e questi punti si chiamano le *quadrature*, o primo e secondo *quarto*. Il modo diverso come ci comparisce la luna costituisce le sue *fasi*.

La rivoluzione della luna che più c'interessa è la *sinodica*, che è l'intervallo che passa da una congiunzione all'altra, cioè da un novilunio all'altro. La durata media è di 29^{gi.} 12^{or.} 44' 3", ed è alla durata dell'anno tropico quasi come 19 a 235; vale a dire che in 19 anni solari si compiono 235 lunazioni.

L'orbita lunare è inclinata all'orbita terrestre per 5° 43' circa. I punti d'intersezione si chiamano *nodi*. La linea de' nodi ha un moto retrogrado o contrario a quello della luna, e compie l'intero giro dell'eclittica in 18 anni e poco più.

L'osservazione grossolana delle fasi lunari ha dato probabilmente origine al piccolo periodo chiamato *settimana*, la cui origine si perde fra le tenebre della più rimota antichità.

Il periodo di 19 anni, dopo il quale la luna ritorna in congiunzione col sole presso a poco ne' medesimi punti del Cielo, è il *ciclo lunare*, chiamato *metonico* da Metone cui se ne attribuisce la scoperta. Il numero del ciclo si chiama *aureo* perchè in Atene fu scritto a lettere d'oro. Per aver un punto fisso che serva a far trovare questo numero, si conta per primo l'anno che precedè l'era cristiana.

Non essendo esatto il rapporto di 19 a 235 tra una rivoluzione sinodica della luna e l'anno tropico, e d'altronde essendo necessaria pel calendario la conoscenza delle lunazioni per fissare la Pasqua, si fa uso per tal oggetto dell'*Epatta* che è un numero indicante l'età della luna nel principio dell'anno.

Il *ciclo solare* è un periodo di 28 anni, dopo del quale i giorni della settimana ritornano a cadere negli stessi giorni del mese; se ne serve la Chiesa per conoscere il dì in cui cadono le domeniche di tutto l'anno. I giorni della settimana sono indicati con le prime lettere dell'alfabeto, dette perciò *domenicali*. Secondo il numero del ciclo che corre attualmente, retrocedendo di 28 in 28 anni, viene per primo il nono avanti l'era corrente.

L'*indizione* è un periodo di 15 anni, usato una volta da' Papi e

In tutti i moti che si considerano in Meccanica, de' gravi de' progetti, del pendolo, delle macchine, de' fluidi, ec, l'unità di tempo è il minuto secondo.

199. Il circolo essendo oggetto delle ricerche de' dotti, la sua circonferenza si è generalmente divisa in 360 parti, chiamate *gradi*; ogni grado in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 secondi. La quarta parte della circonferenza, che dicesi *quadrante*, comprende 90 *gradi*. Per indicare 5 gradi, 7 minuti primi e 47 secondi si scrive $5^{\circ} 7' 47''$.

da' Veneziani. Il primo numero si può fissare a tre anni avanti l'Era Cristiana.

Moltiplicando fra loro i tre numeri 19, 28, 15 si ha 7980 che è il *periodo giuliano* dopo il quale i numeri de' tre cicli ritornano collo stesso ordine. Il numero nel periodo giuliano si ha aggiungendo 4713 all'anno corrente. Dividendolo per 19, per 28, per 15, i resti che si ottengono sono rispettivamente i numeri del ciclo lunare, del solare, e dell'indizione.

Si è supposto precedentemente che l'asse della terra si mantenga sempre parallelo, e che il piano dell'equatore conservi sempre la medesima inclinazione all'eclittica. Ma ciò non è vero a rigore. L'asse della terra è agitato da un leggiero moto, per effetto del quale la sua inclinazione coll'eclittica cambia in ogni istante. Questo fenomeno, conosciuto sotto il nome di *nutazione*, combinato con quello della precessione degli equinozi, fa conoscere che il polo del Mondo non descrive un cerchio intorno al polo dell'eclittica, ma si muove sul contorno di una piccola ellisse, della quale il centro è sulla circonferenza del cerchio menzionato. Il moto adunque del polo è simile a quello di ogni altro punto della superficie terrestre, cioè è di rotazione e di traslazione. Il moto di rotazione, ossia quello che si esegue sulla piccola ellisse dura quanto il moto della linea de' nodi della luna, da cui dipende.

Indipendentemente della nutazione, l'obliquità media dell'eclittica all'equatore cambia pure di continuo. Ma questo cambiamento compreso fra limiti non molto estesi si compie in un periodo lunghissimo e non ancora determinato.

Queste variazioni esercitano una qualche influenza sul moto della linea equinoziale, la durata dell'anno varia di qualche secondo in ogni secolo.

Niuna causa si è finora scoperta che possa indicare una variazione nella durata del giorno medio. Sicchè la rivoluzione diurna della terra offre l'elemento il più costante per la misura del tempo.

Le più diligenti osservazioni assicurano che l'asse della terra incontra la sua superficie sempre ne' medesimi punti. Per cui le diverse regioni della terra conserveranno in perpetuo il medesimo clima.

200. La parola grado non sempre si applica alle divisioni della circonferenza, ma ancora a quelle degli strumenti fisici. In questi il numero delle divisioni è anche determinato, essendosi ordinariamente seguito quello adottato dall'inventore. Per es. nel termometro detto di Réaumur, la lunghezza del tubo compresa fra i due punti che segna il mercurio alla temperatura del gelo che si fonde e a quella dell'acqua bollente è divisa in 80 parti dette *gradi* (*).

§ II. Nuovo sistema metrico di Francia.

201. Per rimediare agl'inconvenienti che presentano la gran varietà di misure e le loro arbitrarie suddivisioni, fu sul finir del passato secolo stabilito in Francia un sistema di misure secondo le condizioni enunciate al n° 194.

Si prese per unità di misura lineare la diecimilionesima parte della distanza dal polo all'equatore sul meridiano che passa per Parigi, e questa misura si chiamò *metro*. Tutte le altre misure di estensione e di peso si son fatte dipendere dal metro.

Si prese per unità di superficie un quadrato che ha per lato dieci metri, e che perciò si compone di 100 metri quadrati, e questa unità fu chiamata *ara*.

L'unità di volume per le legna da bruciare si chiamò *stero*, ed equivale a un cubo di lato un metro.

Un cubo che ha per lato la decima parte di un metro si prese per unità di misura di capacità, e fu chiamata *litro*. Il litro è perciò la millesima parte di un metro cubo.

L'unità di peso fu chiamata *grammo*; ed è il peso di un cubo di acqua di lato la centesima parte di un metro. L'acqua dev'esser pura, pesata nel vuoto e ridotta al suo massimo di

(*) Il termometro è uno strumento che serve a conoscere le differenze di temperatura. Vi sono diverse specie di termometri; ma il più comune è formato di un tubo sottilissimo di cristallo, chiuso al di sopra e terminato al di sotto da una palla o da un tubo più grande. Il tubo è ripieno fino ad una certa altezza di mercurio. Questo fluido si eleva quanto fa più caldo, per la proprietà che hanno i corpi di dilatarsi col calore.

Non tutti i termometri sono divisi nello stesso numero di gradi. Ma sono più in uso quelli divisi in 80 parti o in 100. Quest'ultimo termometro si chiama *centigrado*.

densità. Questa massimo non corrisponde al grado di congelazione, ma verso i 4 gradi del termometro centigrado, giacchè l'acqua nel passaggio dallo stato fluido al solido aumenta di volume.

Si seguì il sistema decimale ne' multipli e summultipli delle misure, stabilendo che il nome della misura fosse pe' multipli preceduto dalle parole prese dal greco (n° 134, N.) *deca*, *ecto*, *kilo*, *miria*, e pe' summultipli dalle parole improntate dal latino *deci*, *centi*, *milli*, ec. Perciò il decametro è una misura di dieci metri, l'ecatometro o ettometro di 100, il chilometro o chilometro di 1000, e il miriametro di 10000 metri; parimenti il decimetro è la decima parte del metro, il centimetro la centesima, ec. Lo stesso ha luogo per le altre misure; per cui il chilogrammo è un peso di 1000 grammi, l'ettolitro è una misura di 100 litri; e così per gli altri (*).

L'unità monetaria è il *franco*, moneta di argento del peso di cinque grammi a $\frac{2}{3}$ di fino. Si divide in decimi e centesimi (**).

202. Non potendo una stessa unità adattarsi a' diversi usi cui son destinate le misure della medesima specie, si è secondo il bisogno presa l'unità, da' multipli o da' summultipli dell'unità principale.

Essendo il *metro* la misura lineare adattata per le occorrenze del commercio, per unità di misura itineraria si prese il chilometro, e anche il miriametro, che corrisponde alla millesima parte del arco del meridiano compreso tra il polo e l'equatore.

Il *grammo* essendo un peso troppo piccolo pe' bisogni comuni, per molti generi si adottò il chilogrammo, che corrisponde al peso di acqua contenuto in un cubo di un de-

(*) I composti dello stero non si sono mai usati. Per l'ara non si è impiegata che l'*ettara*, la *miriara*, e la *centiara*.

(**) Non solo si è fatto il franco un multiplo esatto dell'unità di peso, ma i pezzi di 5 franchi hanno un diametro tale che 27 di essi posti in contatto e coi centri in una medesima linea danno la lunghezza del metro. Basta dunque la sola moneta per somministrare l'unità di peso e di lunghezza; il che riesce di grande vantaggio nel commercio o per supplire con essa alla mancanza di misure proprie, o per rettificare quelle che si posseggono.

cimetro di lato. Un metro cubo d' acqua distillata pesa 1000 chilogrammi.

L' *ara* serviva di unità per le misure agrarie; ma per le altre misure superficiali si faceva uso della centiara che più comunemente si chiamava *metro quadrato*.

203. L' uniformità che esiste fra le suddivisioni di queste misure e il sistema di numerazione permette in un numero di poter cangiare l' unità cangiando solamente la virgola di posto. Per es. il numero 76583,73 metri equivale a 7 miriametri, 6 chilometri, 5 ettometri, 8 decametri, 3 metri, 7 decimetri e 3 centimetri, e può leggersi egualmente 76583 metri e $\frac{73}{100}$, o pure 7658 decimetri e $\frac{73}{1000}$, o pure 765 ettometri e $\frac{7373}{100000}$; e così di seguito.

Non potrebbe operarsi similmente sulle misure di superficie e di volume, giacchè il cambiamento dell' unità non porta lo spostamento della virgola di una sola cifra per volta; come a suo luogo diremo.

204. Nello stabilire il sistema metrico si credè necessario portar la divisione decimale in tutto ciò che era oggetto di calcolo. Essendosi preso per unità degli angoli l' angolo retto, e per unità degli archi la quarta parte della circonferenza, si divise quest' arco in 100 gradi, il grado in 100 minuti primi, il minuta primo in 100 secondi. Questa divisione però non è stata generalmente adottata.

L' uniformità nel sistema delle misure esigea pure che il giorno fosse diviso in 10 ore, l' ora in 100 minuti primi, il minuta primo in 100 secondi. Ma questa idea fu abbandonata nel nascere in vista degli ostacoli che presentavano gli orologi esistenti, dell' incomodo di un' ora così lunga nell' esercizio delle giornaliere faccende, e del pochissimo vantaggio che se ne poteva ritrarre nel calcolo ove è raro che entri il giorno come moltiplicatore o divisore.

205. Dopo essere stato sanzionato e pubblicato il sistema metrico e fatti con la maggior precisione i campioni del metro e del chilogrammo, in modo che il primo rappresentasse la lunghezza stabilita alla temperatura del ghiaccio fondente, e il secondo desse il peso nel vuoto, una nuova misura di un arco di meridiano e una più attenta revisione ne' calcoli antecedenti indussero Delambre a concludere che la distanza tra il polo

e l'equatore è di metri 10000725,2. Si ritenne ciò non ostante il *metro legale* secondo era stato da prima determinato, che differisce da quello che si ebbe in mira di stabilire per una quantità impercettibile (*).

206. Questo sistema trovò un ostacolo insuperabile nella massa del popolo, cui riuscì impossibile di mettere la divisione decimale in relazione co' suoi bisogni. Sicchè prima gli antichi nomi, poi le antiche suddivisioni fa forza ristabilire.

Le altre nazioni anzi che impegnarsi nella difficilissima impresa di cangiare il sistema delle misure, hanno posto ogni cura per determinare il rapporto che la loro misura lineare ha col metro. In conseguenza il metro essendo attualmente la misura cui si rapportano tutte le altre, e potendo perciò servir di termine di paragone fra le misure di diversi paesi, è divenuta per così dire la misura universale. Essendo inoltre il metro la misura meglio determinata che esista, il sistema metrico si trova generalmente adottato da' dotti di tutte le nazioni, che se ne servono ne' loro scritti come il più conveniente alla precisione di cui lo stato attuale delle scienze ha bisogno.

§. III. Antiche misure di Parigi.

L'esposizione di queste misure è necessaria, non solo perchè di molte si fa ancora uso e l'unità lineare servì per la misura dell'arco del meridiano; ma anche perchè in molte opere si trovano espressi secondo l'antico sistema parecchi risultamenti numerici importanti.

207. Misure di lunghezza.

L'unità era il *pie*de, detto *pie*de del Re, di cui si fa uso ancora presso molte nazioni nelle costruzioni navali. Si divide in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. 6 piedi formano una *tesa*.

Per le stoffe l'unità era l'*auna* = $3^{\text{pl.}} \cdot 7^{\text{pol.}} \cdot 10^{\text{lin.}} \cdot \frac{5}{6}$.

Le misure *itinerarie* erano il miglio di 1000 tese, la *lega* di 2000 tese, la *lega comune* di 25 a grado, e la *lega ma-*

(*) Il campione del metro legale, a 6° gradi di temperatura del termometro di Réaumur, dà la lunghezza della diecimilionesima parte del quadrante del meridiano.

rina di 20 a grado. Dicendo lega di 25 a grado si vuol esprimere che nel grado del meridiano si contengono 25 leghe. Or siccome il quadrante si divide in 90 gradi, la sua lunghezza sarà di 2250 leghe comuni e 1800 leghe marine.

208. Nel determinare la lunghezza del quadrante per stabilire il nuovo sistema metrico, essendosi impiegate le antiche misure, si trovò il *metro legale* di linee 443,296. E siccome il piede è di 144 linee, il rapporto del piede al metro sarà di 144:443,296, ovvero di $1: \frac{144000}{443296}$, e quindi sarà $1^{\text{piede}} = 0^{\text{m}}, 324839$.

Parimenti essendo il quadrante del meridiano terrestre composto di 2250 leghe comuni, e di 10000732 metri legali, sarà $1^{\text{leg. com.}} = \frac{10000732^{\text{m}}, 2}{2250} = 4444^{\text{m}}, 766 = \text{chilom. } 4,444766$. Nel modo stesso si trova la lega marina = chilom. 5,555957

209. *Misure di superficie.*

L'unità per le misure agrarie era l'*arpent* composto di 100 pertiche quadrate. Ma la pertica variava nelle diverse provincie. Quella usata a Parigi era di 18 piedi.

Le altre misure si valutavano in piedi quadrati.

210. *Misure di volume.*

Pel legname di costruzione s'impiegava la *soliva* = 3 piedi cubici; e pel legname da bruciare s'impiegava la *corda*, che era un parallelepido di 8 piedi per 4, e di altezza piedi $3 \frac{1}{2}$.

211. *Misure di capacità pe' liquidi.*

L'unità era il *muid*, che si divideva in 36 *setiers*, questo in 4 *quarti* o 8 *pinte*; la pinta in 2 *chopines* o 8 *poissons*. Il *muid* corrisponde a 2,6822 ettolitri, e la pinta a litri 0,9313.

212. *Misure di capacità per gli aridi.*

L'unità era ancora il *muid*, che si divideva in 12 *setiers*, o 24 *mines*, o 48 *minots*, o 144 *boisseaux*, e questo in 16 *litrons*. 1 *setier* = 1,561 ettolitri.

213. *Pesi.*

L'unità era la *libbra* (*peso di marco*) che si divideva in 2 *marchi* o in 16 *once*, l'oncia in 8 *grossi*, il grosso in 3 *scrupoli*, questo in 24 *grani*. Una libbra = 0,48951 chilogrammi.

I diamanti si pesavano a oncia di 144 carati, ognuno di 4 grani.

100 libbre formavano il *quintale*, 10 quintali il *migliaro*.

La *tonnellata* di mare è eguale a 20 quintali, ovvero 2000 libbre. La tonnellata si considera anche a volume, ed è eguale a 42 piedi cubici.

214. Da' rapporti precedenti si ricava

$$1 \text{ metro} = 3^{\text{pt.}}, 07844,$$

$$1 \text{ chilogr.} = 2^{\text{lib.}}, 0^{\text{on.}}, 5^{\text{gr.}}, 1^{\text{sc.}}, 11^{\text{sc.}}.$$

§. IV. Sistema di misure attualmente in uso nella Francia.

215. Con decreto de' 18 brumale an. IX (4 Novembre 1800) ai nomi sistematici furono sostituiti gli antichi nomi, chiamandosi *lega* il miriametro, *miglio* il chilometro, *peritica* il decametro, ec.; *muid* il chilolitro, ec; *libbra* il chilogrammo, ec.

Ma siccome l'ostacolo che impediva la diffusione del nuovo sistema nel popolo non era ne' nomi ma nella grandezza e nelle suddivisioni dell'unità principale, si pensò a stabilire un nuovo sistema di misure dipendente bensì dal metro, ma tale che le diverse misure non differissero sensibilmente da quelle una volta in uso tanto nella grandezza dell'unità che nelle divisioni.

Perciò con decreto de' 12 Febbraio 1812 si permisero le misure seguenti, che furono poi rese legali nel 1816.

1° Una misura di due metri si è chiamata *tesa*, e si è divisa in piedi, pollici e linee secondo l'antico sistema.

2° Si è chiamata *auna* una misura per le stoffe di 12 decimetri. Si divide in *mezzi*, *quarti*, *ottavi* e *sedicesimi*.

3° Per le misure di capacità si è chiamato *boisseau* una misura eguale all'ottava parte dell'ettolitro. Si divide in *mezzi*, *quarti*, ec.

4° La libbra in uso è uguale a mezzo chilogrammo. Si divide come l'antica libbra.

I diamanti son sempre pesati in carati di 4 grani l'uno; ma il grano attuale sta all' antico , come 4:3,798.

§. V. Misure della Città di Napoli.

216. *Misure di lunghezza.*

L' unità per l' uso comune è il *palmo* che si divide in 12 *once* , e l' oncia in 5 *minuti*. 8 palmi formano una *canna*.

L' unità di misura itineraria è il *miglio* di 60 a grado. Il miglio si fa ordinariamente di palmi 7024; ma la sua denominazione fa conoscere che questa è una misura di 1000 *passi* ; ed è questo il *passo geografico*.

217. *Misure di superficie.*

Per gli usi comuni si fa uso del palmo quadrato, e anche della canna quadrata.

Per le misure agrarie l'unità è il *moggio* , che è un quadrato di 30 passi di lato, essendo ogni passo di palmi $7\frac{1}{2}$. In conseguenza il moggio contiene passi quadr. 900 e pal. quadr. 48400.

Il passo agrario è diverso dal geografico.

Il moggio si divide ordinariamente in 10 *quarte* , la quarta in 9 *none* , la nona in 5 *quinte*.

218. *Misure di capacità.*

Per gli aridi l' unità è il *tomolo* , che si divide in 24 *misure* , una misura in 24 *quartarole*.

Pel vino l' unità è il *barile* che si divide in 60 *caraffe*. Dodici barili formano una *botte* , e due botti un *carro*. Per la vendita a minuto s'impiega una caraffa che è $\frac{1}{24}$ del barile.

Per l' olio l' unità è lo *stajo* , che si divide in 16 *quarti* , e il quarto in 6 *misurelli* , 16 staja formano la *salma*. Per la vendita in grande l' olio si valuta a peso; lo *stajo* si conta per rotoli 10 $\frac{1}{2}$.

219. *Misure di volume pe' solidi.*

La canna di legna da bruciare è un parallelepipedo di pal. 8 per 8 in superficie e di gross. pal. 4.

La fabbrica si valuta ordinariamente a canna di costumanza che è un parallelepipedo che ha per base un quadrato di pal.

8 e per alt. pal. 2. I solidi di terra, i cavamenti, ec. si valutano a canna cuba (*).

Il legname di costruzione si valuta in piedi francesi. Un pezzo di lunghezza 36 piedi e di sezione 1 piede in quadro, si chiama *carro*.

220. *Pesi.*

Per alcuni generi l'unità è la libbra che si divide in 12 *once*, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli* o *trappesi*, il trappeso in 20 *acini* o *grani*.

Per gli oggetti preziosi l'oncia si divide in 130 *carati*, il carato in 4 *grani*, il grano in 16 *sedicesimi*.

Per le grandi masse l'unità è il *cantajo* che si divide in 100 *rotoli*. Il rotolo si compone di 1000 trappesi equivalenti a once 35 $\frac{1}{2}$. Il rotolo s'impiega anche pe' commestibili e si divide in metà, terzi e quarti.

La calce si valuta anche a peso. 40 rotoli formano in commercio un *peso*.

§. VI. *Maniera di determinare i rapporti delle misure fra loro e con quelle del sistema metrico, esposta sulle misure di Napoli.*

221. Per avere i rapporti delle misure fra loro è necessario prima determinare co' confronti de' campioni esistenti, il rapporto che tutte hanno coll'unità lineare.

Le misure di Napoli hanno col palmo i seguenti rapporti approssimati.

Il tomolo = p. cub. 3,017807; il barile = p. cub. 2,382532;
lo stajo = pal. cub. 0,5548538;

un pal. cubo d'acqua distillata pesa lib. 57,14830
= rot. 20,573388 (**).

(*) Nella Direzione Generale di Ponti e Strade nel 1830 fu dal ch. attuale Direttore Generale Commendatore Afan de Rivera con savio accorgimento stabilito, che l'unità lineare fosse la *pertica* = 10 palmi, che le superficie e i volumi si valutassero rispettivamente a pertica quadrata e a pertica cuba, e che ne' trasporti di terra si prendesse per unità la pertica cuba trasportata a 1000 palmi di distanza. E siccome la nostra moneta ha la divisione decimale, con la disposizione accennata si è introdotto il sistema decimale in tutto ciò che è oggetto di calcolo per gl'Ingegneri.

(**) Questi rapporti si sono ricavati da quelli ottenuti dal paragone de' campioni con le misure del nuovo sistema metrico, riportati in una

Da questi rapporti ricavansi tutti quelli che seguono.

Un palmo cubo = 0,3313664 tomoli = 1,8022767 staja

= 0,4197216 barili = 25,18329 caraffe di botte

= 27,70162 caraffe a minuto ;

un tomolo = 1,266639 barili ;

un barile = 0,7894911 tomoli ;

una caraffa da botte = 0,039709 pal. cubi ;

..... a minuto = 0,036099.....

un barile di acqua distillata pesa lib 136,1557 = rot. 49,016 ;

una caraffa da botte d'acqua distillata pesa lib. 2,26926 ,

..... a minuto..... lib. 2,06296 ,

una libbra d'acqua distillata è uguale a

caraffe da botte 0,44067 ,

..... a minuto 0,48474 ;

un libbra è il peso di pal. cubi 0,017498 di acqua distillata ;

un rotolo è il peso di pal. cubi 0,048606 di acqua distillata .

Di fatto essendo 1 tomolo = pal. cubi 3,017807, è evidente che 1 pal. cubo = $\frac{1}{3,017807} = \frac{1000000}{3017807}$; e fatta la divisione si trova il rapporto riportato di sopra. In un modo analogo si opererà per gli altri ; e sarà un esercizio proficuo per l'allevio il verificare i rapporti suddetti , ricavandoli dai primi quattro, studiando il modo più breve per pervenire ai risultati , e assicurandosi , quando è possibile , dell'esattezza del calcolo dall'identità de' risultamenti ottenuti per diverse vie.

222. Essendo questi rapporti approssimati , riesce utilissimo in questo caso il metodo del n° 147 per far la divisione. In effetti , riprendendo il rapporto di sopra $\frac{1000000}{3017807}$, si dovrà dividere 1000000 per 3010807 che non è divisore esatto. Ma nella divisione ordinata le cifre del divisore essendo successivamente chiamate , quelle che mancano non influiscono sopra le cifre del quoziente , che quando dovrebbero cominciare a entrare in funzione. Per promuovere quest'utile esercizio

pregiata memoria del ch. Signor Colonnello Visconti letta all' Accademia delle Scienze nel 1828 , riguardante una riforma di cui son suscettibili le misure di Napoli.

riportiamo qui per disteso l'operazione.

$$\begin{array}{r}
 \overline{1000'0'0'0'} \quad \left| \begin{array}{r} \overline{3017807} \\ 0,3313664 \end{array} \right. \\
 \hline
 100 \\
 3 \\
 \hline
 97 \\
 70 \\
 \hline
 24 \\
 46 \\
 160 \\
 46 \\
 \hline
 114 \\
 240 \\
 34 \\
 \hline
 206 \\
 260 \\
 56 \\
 \hline
 204 \\
 240 \\
 93 \\
 \hline
 \text{ult. divid.....} \quad 147
 \end{array}$$

223. Le esposte misure hanno l'inconveniente di non esser legate fra loro con rapporti esatti e facili a ritenersi a memoria. Ma svolgendo le frazioni decimali in frazioni continue (n° 151) si ricavano i seguenti rapporti che negli usi comuni possono tener luogo de' precedenti.

Il tomolo è eguale a barili $1\frac{4}{15}$, cioè il tomolo sta al barile come 19:15; per cui 15 tomoli eguagliano presso a poco 19 barili.

La caraffa da botte è il peso di $\frac{6}{11}$ di pal. cubo d'acqua distillata, ed eguaglia lib. $2\frac{7}{11}$ della medesima acqua; e perciò un barile di acqua distillata passerà lib. $136\frac{1}{11}$ all'incirca.

224. Nel modo stesso si possono determinare i rapporti di queste misure con quelle del sistema metrico; ma è necessario prima determinare quello del metro al palmo.

Ora essendo il miglio la sessantesima parte del grado del meridiano, il quadrante dello stesso meridiano conterrà 5400 miglia; e quindi

$$1 \text{ miglio} = \frac{10000723,2}{5400} \text{ metri} = \text{chilom. } 1,85198577.$$

Ammettendo che 7024 palmi formino un miglio, sarà facile trovare il rapporto del palmo al metro. In effetti sarà $5400 \times 7024 \text{ palmi} = 10000723,2 \text{ metri}$, e

$$1 \text{ palmo} = \frac{10000723^{\text{m}},2}{37929600} = 0^{\text{m}},26367.$$

Quindi

$$1 \text{ metro} = 3^{\text{pal}},79262 (*).$$

225. Per avere i rapporti tra le misure di capacità, e tra i pesi, è mestieri trovare quelli che esistono tra il palmo quadrato e il metro quadrato, tra il palmo cubo e il metro cubo. Ora è chiaro (n° 194) che

$$1 \text{ pal. quadr.} = 0,26367 \times 0,26367 \text{ metri quadrati},$$

$$1 \text{ pal. cubo} = 0,26367 \times 0,26367 \times 0,26367 \text{ metri cubi}.$$

Per avere i prodotti esatti, sarebbe necessario trovare con maggiore approssimazione il rapporto del palmo al metro, spingendo più innanzi la divisione dell'espressione $\frac{100007,232}{379296}$

(*) Tutti coloro che hanno rivolto il pensiero alla condizione delle misure di Napoli, hanno opinato che per palmo siasi in origine voluto prender la settemillesima parte del miglio. Questa opinione, oltre all'esser sostenuta da un'antica tradizione, si rende plausibile considerando che que' pochi palmi di differenza (che neppure potrebbero determinarsi per mancanza di campioni lavorati con precisione e ben conservati) possono provenire da che i metodi antichi per misurare il grado del meridiano non potevano dare quella precisione che si è poi ottenuta coi mezzi che il progresso della scienza ha suggeriti.

Checchè ne sia, prendendo il palmo eguale alla settemillesima parte del miglio, oltre la semplicità che ne risulta ne' calcoli, si ottiene una unità lineare ricavata come il metro da una misura naturale.

Ma il più notevole è che con questo nuovo palmo, tutte le altre misure alterate di una quantità impercettibile nell'uso comune si possono riavere dal palmo con rapporti esatti e facili, siccome ha fatto vedere il signor Visconti nella citata memoria.

Rettificando in parte le divisioni, ove si può senza allontanarsi gran fatto dalle abitudini popolari, avremmo un sistema di misure, se non semplice quanto il metrico, dotato almeno delle condizioni che ne rendono possibile la diffusione.

Questo nuovo palmo, già adottato nel R. Ufficio Topografico, e nella Direzione Generale di Ponti e Strade, è eguale a $0^{\text{m}},264569$.

che rappresenta questo rapporto. Ritenendo per maggior semplicità il valore precedente (che è quello dato dal campione), e prendendo per unità il decimetro, si ha

$$1. \text{ pal. quadr.} = 6,95218689 \text{ decim. quadrati};$$

e moltiplicando nuovamente per 2,6367, si ha

$$1 \text{ palmo cubo} = 18,33083117 \text{ decimetri cubi.}$$

Ora essendo 1 moggio = 48400 palmi quadrati, sarà

$$1 \text{ moggio} = 3364,858 \text{ metri quadr.} = \text{are } 33,64858.$$

Essendo il litro la capacità di un decimetro cubo, sarà

$$1 \text{ pal. cubo} = 18,33083117 \text{ litri.}$$

E quindi

$$\begin{aligned} 1 \text{ tomolo} &= 18,33083117 \times 3,017807 \text{ litri} = 55,31892 \text{ litri}; \\ 1 \text{ stajo} &= 18,33083117 \times 0,5548538 \text{ litri} = 10,1709315 \text{ litri}; \\ 1 \text{ barile} &= 18,33083117 \times 2,382532 \text{ litri} = 43,67379 \text{ litri.} \end{aligned}$$

Essendo il chilogrammo il peso di un decimetro cubo d'acqua distillata, 1 pal. cubo d'acqua distillata peserà chilogr. 18,33083117. Si avrà perciò

$$20,573388 \text{ rotoli} = 18,33083117 \text{ chilogr.}$$

e quindi

$$1 \text{ rotolo} = \frac{1833083117}{20573388} \text{ chil.} = 0,8909972 \text{ chilog.}$$

E siccome 1 libbra = 0,36 rotoli, sarà

$$1 \text{ libbra} = 0,3207590 \text{ chilogr.}$$

Rovesciando il rapporto del rotolo al chilogrammo, si ha

$$1 \text{ chilogrammo} = 1,1223379 \text{ rotoli} = 3,1176054 \text{ libbre.}$$

§. VII. Sistema di misure di Sicilia.

Le misure di Sicilia stabilite nel 1809 presentano una certa uniformità nelle suddivisioni, e tutte dipendono dal palmo.

226. Misure di lunghezza.

Il *palm* si divide in 12 *once*, l' *uncia* in 12 *linee*, la *linea* in 12 *punti*. Una *canna* = 8 palmi,

Il palmo di Sicilia è eguale a metri 0,2581882, e a palmi di Napoli 0,9792095.

Il *miglio* è di pal. 5760; si divide in 45 *corde*, ogni corda in 4 *catene*, essendo la catena di 4 canne.

227. Misure superficiali.

L'unità di misura agraria è la *salma* che è un quadrato che ha per lato 64 canne; si divide in 4 *bisacce*, questa in 4 *tomoli*, il tomolo in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, questo in 4 *quarti*, risultando il quarto di 4 canne quadrate.

228. Misure di capacità.

Il *tomolo* per gli aridi, che eguaglia un palmo cubo, si divide in 4 *mondelli* = 16 *carozzi* = 64 *quarti* = 256 *quartigli*. 16 tomoli formano la *salma*.

Il *quartaro* pe' liquidi, che pure è eguale a 1 palmo cubo, si divide in 20 *quartucci*, questo in 2 *caraffe* = 4 *bicchieri*. Due quartari formano il *barile*, e 32 barili una *botte*.

229. Pesi.

L'unità è il *roto*, che è il peso della ventesima parte di un palmo cubo d'olio d'oliva puro; si divide in 30 *once*, l' *uncia* in 8 *dramme*, la *dramma* in 3 *denari*, il denaro in 20 *grani* o *cocci*, il grano in 8 *ottavi*. La libbra è di 12 *once*, e il *cantajo* di 100 rotoli.

§. VIII. De' rapporti di alcune altre principali misure.

230. Sarebbe impossibile senza uscir da' limiti di una discreta brevità, riportar qui con minute particolarità tutte le misure di cui si fa uso, siccome abbiamo fatto per quelle di Francia e di Napoli. Osserviamo però che quanto ai nomi e alle suddivisioni dell'unità è facile

nel Paese ove si dimora fornirsi delle notizie necessarie per gli ordinari bisogni ; e d'altronde si può, in mancanza di conoscenze opportune sul modo di divider l' unità, supplire co' decimali. Quello che più interessa, e che riesce più difficile a sapersi, è il rapporto che le misure hanno fra loro.

Ci contenteremo di riportar qui i rapporti che hanno con le misure del sistema metrico quelle che possono più interessare per relazioni scientifiche o commerciali.

231. *Misure di lunghezza per l' uso comune.*

Palmo di Barcellona=met.	0,1976	(1 canna = 2 vare = 8 palmi)
..... Castiglia.....	0,2091	(1 vara = 4 palmi)
..... Firenze.....	0,2918	(1 brac. d. ^o <i>apanno</i> = m. 0,5836)
..... Genova.....	0,2491	(1 br. = pal. 2 $\frac{1}{2}$)
..... Lisbona.....	0,2192	
..... Malta.....	0,2817	
..... Roma.....	0,2489	(1 can. = 8 palmi)
..... Sardegna.....	0,2480	
..... Valenza.....	0,2275	
Piede di Anversa.....	0,2868	
..... Amsterdam.....	0,2831	(1 pi. = 3 pal., 1 tesa = 6 piedi)
..... Baviera.....	0,3120	
..... Berlino.....	0,3100	
..... Bologna.....	0,3805	
..... Bruxelles.....	0,2757	
..... Castiglia.....	0,2789	(4 palmi = 3 piedi)
..... Cracovia.....	0,3564	
..... Danzica.....	0,2869	
..... Dresda.....	0,2831	
..... Edimburgo.....	0,3060	(1 yard. = metri 0,950)
..... Ferrara.....	0,4039	
..... Ginevra.....	0,4879	
..... Inghilterra.....	0,3048	(1 yard. = 3 piedi = $\frac{1}{2}$ fathom)
..... Lipsia.....	0,2822	
..... Macerata.....	0,5585	
..... Modena.....	0,5230	
..... Mantova.....	0,4669	
..... Monaco.....	0,2891	
..... Norvegia.....	0,3140	
..... Padova e Vicenza.....	0,3574	
..... Praga.....	0,3002	
..... del Reno.....	0,31382.6	
..... di Roma.....	0,2950	
..... Russia.....	0,3542	
..... Svezia.....	0,2970	(1 faden = 3 aune = 6 piedi)
..... Torino.....	0,3230	
..... Venezia.....	0,3467	
..... Vienna.....	0,3161	(1 Klafter = 6 piedi)

232. *Misure itinerarie.*

Miglio di 60 a grado, adottato in tutta l'Italia = $\frac{1}{3}$ della lega marina in uso nella Francia, nell'Inghilterra, nell'Olanda e nella Polonia.....	= chilom.	5,555
..... Alemagna { grande di 15 a grado.....		7,408
..... piccolo.....		6,274
..... Danzica.....		7,749
..... Danimarca = 1200 aune.....		7,532
..... Olanda di 75 a grado.....		1,481
..... Inghilterra (legale) = 1760 yards.....		1,851
..... Scozia.....		1,814
..... Turchia.....		1,670
Lega di 25 a grado, in uso nella Francia e in Amburgo...		4,444
..... Boemia di 16 a grado.....		6,950
..... Olanda di 1866 $\frac{1}{4}$ piedi del Reno.....		5,857
..... Portogallo di 18 a grado.....		6,173
..... Scozia di 50 a grado.....		2,224
..... Spagna = 800 vare di Castiglia.....		6,692
..... Svezia = 6000 faden.....		10,687
Werst di Russia.....		1,066

233. *Pesi.*

Libbra di

Amsterdam { di comm. = 16 on. = chilogr. 0,4941 }	1 cant. = 100 lib.
{ peso di mar. = 2. mar. 0,4922 }	1 tonn = 20 cant.
	1 last = 2 tonn.
Berlino = 16 once.....	0,4685
Bologna.....	0,3619
Brusselles { di commercio.....	0,4685
{ peso di troy.....	0,4967
Castiglia, in uso in tutta la Spagna.....	0,4601
Copenague.....	0,5001
Ferrara.....	0,3458
Firenze.....	0,3395
Genova.....	0,3169
	1 cant. = 100 rot.
	= 150 lib.
Ginevra { forte.....	0,5507
{ sottile.....	0,4589
Inghilterra { detta troy.....	0,3732
{ detta avoirdupois.....	0,4535
Lipsia (di commercio).....	0,4668
Milano { peso grosso = 28 once.....	0,7628
{ peso sottile = 12 once.....	0,3268
Prussia = 2 marchi di Colonia = 32 loths	} 1 quintal = 100 lib.
= $\frac{1}{24}$ del peso di 1 piede cubo del Reno	
di acqua distillata a 15° R.....	
Roma.....	0,3392
Russia.....	0,4092
Svezia (detta <i>victualia</i>) = 32 loths.....	0,4252
	1 last di mare = 40 quint.

Libbra di	
Torino.....	0,3688
Venezia { peso grosso.....	0,4771
{ sottile.....	0,3012
Vienna	0,5601

234. Dividendo l'uno per l'altro i numeri che rappresentano i rapporti delle misure con quelle del sistema metrico, si ottengono quelli delle misure stesse fra loro. Per es. 1 palmo di Barcellona $= \frac{2}{3} \frac{9}{12}$ palmi di Castiglia; 1 pi. del Reno $= \frac{1}{11} \frac{3}{5} \frac{1}{7} \frac{1}{10}$ pal. di Napoli $= 1,32885$ palmi di Napoli.

A R T. II.

Moltiplicazione de' numeri complessi della medesima specie.

235. Abbiamo detto (n° 194) che il prodotto de' numeri che esprimono le misure di due linee rappresenta la misura di una superficie.

Quando i fattori lineari sono interi o espressi in frazioni decimali, la formazione di questo prodotto non ammette alcuna difficoltà, giacchè le parti decimali del prodotto rapportandosi all'unità principale ne esprimeranno la parte decima, centesima, ec. Per es. trattandosi di moltiplicare 237^{me},35 per 12^{me},41, si considereranno questi fattori come numeri astratti e poi si darà al prodotto la denominazione dell'unità superficiale cui si riferisce. Si avrà dunque per risultamento 2945,5135 metri quadrati, ossia 2945 metri quadrati più 5145 diecimillesimi di un metro quadrato.

Se però questo prodotto si volesse esprimere in quadrati che hanno per lato le diverse parti nelle quali si divide il metro lineare, bisogna osservare che siccome 1 metro contiene 10 decimetri, 1 metro quadrato conterrà decimetri quadrati 10×10 ovvero 100. Per la stessa ragione 1 decimetro quadrato contiene 100 centimetri quadrati, 1 centimetro quadr. 100 millimetri quadrati, e così di seguito. In conseguenza un metro quadrato conterrà 100 decimetri quadr., 10000 centimetri quadr., 1000000 millimetri quadrati, e così per gli altri. Quindi i centesimi del metro quadrato esprimono decimetri quadr., i diecimillesimi esprimono centimetri quadr., ec. In guisa che il prodotto ottenuto si enuncia: 2945 m. quadr., 51 decim. quadr., 35 centim. quadrati.

Quel che si è detto relativamente alle parti decimali del

metro quadrato è applicabile ancora ai diversi ordini di unità che sono a sinistra della virgola. Di fatto, siccome il decametro è eguale a 10 metri, un decametro quadrato conterrà 100 metri quadrati; parimenti un ettometro ne conterrà 10000, ec; per cui le centinaia del metro quadr. esprimono decimetri quadr., le decine di migliaia rappresentano ettometri, ec.

Da ciò segue che per enunciare in misure quadre un numero espresso in parti decimali, bisogna, a partir dalla virgola, separar le cifre a due a due andando verso la destra e poi verso la sinistra. Moltiplicando $734^m,232$ per $27^m,483$, si ottiene per prodotto 20178,898056 che può enunciarsi: 2 ettare, 1 ara, 78 metri quadrati, 89 decimetri quadr., 80 centimetri quadr., 56 millim. quadrati.

Se il numero delle cifre decimali fosse impari, per leggerlo in misure quadre bisognerà renderlo pari aggiungendo un zero alla destra. Così 3,715 metri quadrati si legge: tre metri quadr. 71 decim. quadr. e 50 centimetri quadr.

Se dunque si vuol cangiare il nome dell'unità principale, bisogna spostar la virgola di due posti per volta, e non già di uno come nelle misure lineari (n° 203). Quindi il numero ettare 2,0178898056, si può leggere ancora 201,78898056, o pure metri quadr. 20178,898056, o pure decim. quadr. 2017889,8056, ec.

Queste medesime conseguenze si possono dedurre ancora del ragionamento seguente. Avendosi i due fattori $734^m,232$ e $27^m,483$, il loro prodotto si riferirà al quadrato che ha per lato il metro; ma se si moltiplica 734232 decimetri per 27483 decimetri, il prodotto si riferirà al quadrato che ha per lato un decimetro; se si considerano i fattori riferiti al centimetro, cioè si moltiplica $73423,2$ centimetri per $2748,3$ centimetri, il prodotto sarà espresso in centimetri quadrati; parimenti avendosi 734232 decimetri per 27483 decimetri, il prodotto sarà in decimetri quadr. E ben si vede che lo spostamento della virgola di un posto in ciascun fattore porta il passaggio di due cifre nel prodotto. È inoltre evidente che i due fattori dovendosi rapportare alla medesima unità, in ciascun fattore la virgola deve ricevere un eguale spostamento. Che se i numeri da moltiplicarsi fossero $3^m,74$, e $2^m,3$, si tratterebbe di moltiplicare 374 centimetri per 230 centimetri; la qual cosa rende evidente che per esprimere in misure quadre le parti decimali del prodotto bisogna render pari il numero delle cifre decimali.

È da osservare in ultimo che $\frac{1}{100}$ di metro quadrato equivale a un rettangolo che ha per lato 1 metro e per alt. 1 decimetro, che $\frac{1}{10000}$ di metro quadrato equivale a un rettangolo di 1 metro per un centimetro, ec. In conseguenza il numero 375,2473 metri quadrati può rappresentare la misura di un rettangolo che ha per base 1 metro e per altezza 375,2473 metri.

236. Le medesime considerazioni si possono applicare ai prodotti di tre fattori lineari. Per es. il prodotto de' tre fattori $4^m, 72, 15^m, 19, 37^m, 34$ è 2677,158512 metri cubi, e tutte le cifre poste a destra della virgola esprimono parti decime, centesime, ec. del metro cubo. Volendo esprimere queste frazioni in cubi che hanno per lati le parti del metro lineare, basterà riflettere che 1 metro cubo contiene 1000 decimetri cubi, che 1 decimetro cubo contiene 1000 centimetri cubi ec.; quindi si ha 1 metro cubo = 1000 decimetri cubi = 1000000 centim. cubi = 1000000000 millim. cubi, ec. Da ciò segue:

1° che le parti millesime del metro cubo esprimono decimetri cubi, che le milionesime corrispondono ai centimetri cubi, ec.;

2° che per la medesima ragione le migliaja corrispondono ai decanetri cubi, i milioni agli ettometri, ec.;

3° che una misura cubica espressa in decimali se si vuole enunciare in cubi che hanno per lato i diversi ordini di unità di cui si può comporre l'unità lineare, bisogna separar le cifre a tre a tre partendo dalla virgola e andando prima verso la destra e poi verso la sinistra;

4° che a tale oggetto bisogna che il numero delle cifre decimali sia multiplo di 3; e se non lo è, renderlo tale aggiungendo, secondo il bisogno, o uno o due zeri;

5° che volendo cangiare il nome dell'unità principale bisogna trasportare la virgola di tre cifre per volta.

Per es. il numero 37583,69327 metri cubi corrisponde a 37 decam. c., 583 metri cubi, 693 decim. cubi, 270 centim. cubi.

Questo numero si può parimenti considerare come rappresentante la misura di un parallelepipedo rettangolo, che ha per base un metro quadrato e per altezza metri 37583,69327.

237. Il caso in cui le misure lineari sono espresse in nu-

meri complessi è il solo che si presenti nel quale si tratti di moltiplicare fra loro due numeri complessi della medesima specie (n° 122). Conoscendo che il prodotto di due fattori lineari deve riferirsi all' unità superficiale, la quale è il quadrato fatto su l' unità lineare, il primo mezzo che si presenta è quello di ridurre i due numeri dati ad unità dell' infima specie. Si farà allora il prodotto come se fossero numeri astratti, e l' unità cui si riferirà questo prodotto sarà il quadrato avente per lato l' unità dell' infima specie contenuta nelle misure lineari. Per esprimere poi questo prodotto in misure quadrate che hanno per lati le diverse parti nelle quali si divide l' unità principale, bisogna conoscere quante unità quadrate di un ordine si contengono nell' unità immediatamente superiore, ed operare poi sul prodotto secondo abbiamo mostrato al n° 110.

Si tratti per es. di moltiplicare $28^{tes.} 5^{pi.} 8^{pol.} 2^{lin.}$ per $13^{tes.} 2^{pi.} 5^{pol.}$. Si riducano questi due numeri a linee (n° 110), e si avrà 25010 linee da moltiplicare per 11580 linee. Il prodotto sarà 289615800 linee quadrate. Per esprimere questo prodotto anche in pollici quadr., piedi quadrati e tese quadrate, si osserverà, che essendo 1 tesa = 6 piedi, sarà 1 tesa quadr. = 36 piedi quadr.; parimenti essendo 1 piede = 12 pollici, sarà 1 pied. quadr. = 144 pollici quadr.; e per la medesima ragione 1 pollice quadr. = 144 linee quadr. Si tratterà dunque di far su quel numero l' operazione del n° 110, dividendo successivamente per 144, 144, 36. La qual cosa effettuata dà

387 tes. quad., 34. pi. q., 116 poll. quad., 120 lin. quad.

238. Ma l' operazione eseguita secondo questo metodo riesce alquanto lunga, giacchè conduce ad operare sopra numeri molto grandi. Si può con vantaggio sostituire a questo il metodo di *prendere in parti* (n° 119), esprimendo il prodotto in rettangoli che abbiano tutti per base l' unità principale e per altezza le diverse parti nelle quali si divide e suddivide questa unità. Nell' esempio proposto, prendendo il primo fattore per moltiplicando, e facendo il prodotto per 1 tesa, si avrà la misura di un rettangolo che ha per uno de' lati una tesa e per l' altro, lato $28^{tes.} 5^{pi.} 8^{pol.} 2^{lin.}$; e secondo la natura della moltiplicazione questo rettangolo starà al prodotto che si cerca come $1^{tes.} : 13^{tes.} 2^{pi.} 5^{pol.}$. Si potrà dunque riguardare il mol-

moltiplicatore come numero astratto, e allora l'operazione è ridotta a ripetere il menzionato rettangolo 13 volte e poi prenderne quella stessa parte che $2^{\text{p.}} 5^{\text{pol.}}$ è di 1 tesa. Ora il rettangolo che ha per uno de' lati 1 tesa e per l'altro $28^{\text{t.}} 5^{\text{p.}} 8^{\text{pol.}} 2^{\text{lin.}}$ si decompone in rettangoli che hanno tutti per base 1 tesa, e per altezze rispettive un certo numero di tese, o di piedi, o di linee.

I rettangoli di 1 tesa per 1 tesa, di 1 tesa per 1 piede di 1 tesa per 1 linea si chiamano rispettivamente *tese-tese* o *tese-quadrate*, *tese-piedi*, *tese-pollici*, *tese-linee*. L'operazione è dunque ridotta a moltiplicare una superficie per un numero astratto, cioè $28^{\text{t.}} 5^{\text{p.}} 8^{\text{t.}} 2^{\text{lin.}}$ per $13 + \frac{2}{6} + \frac{5}{72}$; e osservando che le tese-tese, tese-piedi, tese-pollici serbano fra loro lo stesso rapporto che serbano le unità lineari corrispondenti alle altezze, giacchè i rettangoli della medesima base stanno fra loro come le altezze, l'operazione con l'uso delle parti aliquote può esser condotta nel modo che qui si vede,

		$28^{\text{t.}} 5^{\text{p.}}$	$8^{\text{t.}} 2^{\text{lin.}}$	
		$13^{\text{t.}}$	$2^{\text{p.}}$	$5^{\text{pol.}}$
		84		
		28		
prod. per	$3^{\text{t.}} 6^{\text{p.}}$	6	$3^{\text{t.}} 6^{\text{p.}}$	(si prende la metà di 13).
.....	$2^{\text{t.}} 4^{\text{p.}}$	4	2	(si prende il terzo di 13).
.....	$6^{\text{t.}} 1^{\text{pol.}}$	1	0	$6^{\text{t.}} 1^{\text{pol.}}$
.....	$2^{\text{t.}} 2^{\text{pol.}}$	0	2	2
.....	$2^{\text{t.}} 2^{\text{lin.}}$	0	0	2
.....	$2^{\text{p.}}$	9	3	10
.....	$4^{\text{pol.}}$	1	3	7
.....	$1^{\text{pol.}}$	0	2	4
		$387^{\text{t.}} 5^{\text{p.}}$	$9^{\text{t.}} 7^{\text{lin.}}$	$\frac{1}{3} \frac{1}{6}$

Per convertire questo prodotto in misure quadre si osserverà che

$$1^{\text{t.}} 6^{\text{p.}} = 6^{\text{p.}} \times 1^{\text{p.}} = 6 \text{ piedi quadr.};$$

$$1^{\text{t.}} 72^{\text{pol.}} = 72^{\text{pol.}} \times 1^{\text{pol.}} = 72 \text{ pol. quadr.} = \frac{1}{2} \text{ piede quadrato};$$

$$1^{\text{t.}} 86\frac{1}{2} \text{ lin.} = 86\frac{1}{2} \text{ lin. quadr.} = 6 \text{ pol. quadr.}$$

Si avrà quindi

38 ^{7^{t. t.}}	=	38 ^{7^{t. qu.}}		
5 ^{t. pie.}	=		30 ^{pi. qu.}	
9 ^{t. pol.}	=	4	72 ^{pol. qu.}	
7 ^{t. lin.}	=		42	
$\frac{1}{16}$ ^{7^{t. lin.}}	=		2	120 ^{lin. qu.}
somma...		38 ^{7^{t. qu.}}	34 ^{pi. qu.}	116 ^{pol. qu.}
				120 ^{lin. qu.}

risultamento identico a quello trovato precedentemente.

Per rendere più familiare il metodo aggiungeremo un altro esempio. Si tratti di moltiplicare 13^{can.} 7^{pal.} 5^{on.} 2^{min.} $\frac{3}{5}$ per 7^{can.} 0^{pal.} 7^{on.} 1^{min.} $\frac{1}{5}$. Prendendo il primo numero per moltiplicando e chiamando canne-palmi, canne-once, canne-minuti, i rettangoli che hanno per base una canna, e per altezze rispettive 1 palmo, 1 oncia, 1 minuto, si regolerà l'operazione in conformità di quello che si è fatto nel primo esempio.

	13 ^{c. c.}	7 ^{c. pol.}	5 ^{c. on.}	2 ^{c. min.}	$\frac{3}{5}$
	7 ^{c.}	3 ^{pal.}	7 ^{on.}	1 ^{min.}	$\frac{1}{5}$
	91 ^{c. c.}				
prod. per	4 ^{c. pol.}	3	4 ^{c. pol.}		
.....	2	1	6		
.....	1	0	7		
.....	4 ^{c. on.}	0	2	4 ^{c. on.}	
.....	1	0	0	7	
.....	1 ^{c. min.}	0	0	1	2 ^{c. min.}
.....	1	0	0	1	2
.....	$\frac{1}{5}$	0	0	0	1
.....	$\frac{3}{5}$	0	0	0	2
prod. per	1 ^{pal.}			1 ^{c. c.}	5 ^{c. p.}
.....	6 ^{onc.}	0	6	11	2
.....	1 ^{on.}	0	1	1	4
.....	1 ^{min.}	0	0	2	3
.....	$\frac{1}{5}$	0	0	0	4
		98 ^{c. c.}	4 ^{c. pol.}	7 ^{c. on.}	4 ^{c. min.}
					$\frac{197}{1200}$

Questo prodotto, convertito come sopra, in misure quadre, diverrà

$$98^{\text{c. qu.}} \quad 37^{\text{p. qu.}} \quad 36^{\text{on. qu.}} \quad 18^{\text{m. qu.}} \quad \frac{4}{5}$$

239. Quando si tratta di moltiplicar fra loro tre fattori lineari dati sotto la forma di numeri complessi, si presenta tosto l'idea di ridurli ad unità dell'infima specie contenuta in essi, e il loro prodotto si rapporterà al cubo che ha per lato questa medesima unità. Per esprimere questo prodotto in misure cubiche si opererà in un modo analogo a quello esposto per le misure quadre.

Supponiamo che si tratti di moltiplicar fra loro i tre fattori.

$$28^{\text{tesa}} \quad 2^{\text{pi.}} \quad 8^{\text{pol.}} \quad 2^{\text{lin.}}, \quad 13^{\text{t.}} \quad 2^{\text{pi.}} \quad 5^{\text{pol.}}, \quad 7^{\text{t.}} \quad 4^{\text{pi.}} \quad 9^{\text{pol.}} \quad 2^{\text{lin.}}$$

Ridotti a linee, si hanno i tre fattori

$$25010^{\text{lin.}}, \quad 11580^{\text{lin.}}, \quad 6734^{\text{lin.}},$$

il prodotto de' quali è 1950272797200 lin. cubiche.
Ora si ha

$$\begin{aligned} 1 \text{ tesa cub.} &= 6 \times 6 \times 6 \text{ pi. cub.} = 216 \text{ pi. cub.}, \\ 1 \text{ pi. cub.} &= 12 \times 12 \times 12 \text{ pol. cub.} = 1728 \text{ pol. cub.}, \\ 1 \text{ pol. cub.} &= 1728 \text{ lin. cub.} \end{aligned}$$

Facendo dunque sul numero ottenuto l'operazione del n° 110, impiegando successivamente i divisori 1728, 1728, 216, si avrà il prodotto espresso in misure cubiche, cioè

$$3023^{\text{t. cub.}} \quad 174^{\text{pi. cub.}} \quad 714^{\text{pol. cub.}} \quad 1680^{\text{lin. cub.}}.$$

240. Questo metodo riesce tanto più lungo e penoso, quanto più grandi sono i fattori, e maggiore il numero delle parti nelle quali ciascuna unità si suddivide.

Per seguire anche in questo caso un metodo analogo a quello esposto per le misure di superficie, bisogna osservare che il prodotto de' primi due fattori espresso in tesa-tese, tese-piedi, ec. è

$$587^{\text{t. t.}} \quad 5^{\text{t. pi.}} \quad 9^{\text{t. pol.}} \quad 7^{\text{t. lin.}} \quad \frac{1}{11}.$$

Questo prodotto esprime la misura di un rettangolo che ha per uno de' lati 1 tesa e per l' altro lato $387^{\text{t.}} 5^{\text{pi.}} 9^{\text{pol.}} 7^{\text{lin.}} \frac{7}{16}$. Se questo rettangolo si moltiplica per una tesa, si avrà un parallelepipedo rettangolo che ha per base questa superficie e per altezza 1 tesa; e per conseguenza starà al parallelepipedo che si cerca come $1^{\text{t.}} : 7^{\text{t.}} 4^{\text{pi.}} 9^{\text{pol.}} 2^{\text{lin.}}$. Si potrà dunque considerare questo fattore come numero astratto, e allora si tratterà di ripetere quel solido 7 volte, e poi prenderne quella parte che $4^{\text{pi.}} 9^{\text{pol.}} 2^{\text{lin.}}$ è di 1 tesa. Ora quel parallelepipedo rettangolo, avendo due lati eguali ad 1 tesa, è identico col parallelepipedo rettangolo che ha per base una tesa quadrata e per altezza $387^{\text{t.}} 5^{\text{pi.}} 9^{\text{pol.}} 7^{\text{lin.}} \frac{7}{16}$, e questo parallelepipedo si può decomporre in altri parallelepipedi che hanno tutti per base una tesa quadrata, e per altezze le diverse parti nelle quali si può decomporre il menzionato numero. Siccome questi parallelepipedi stanno fra loro come le altezze, si farà il prodotto pel terzo fattore, come se si trattasse di moltiplicare una misura lineare per un numero astratto; e il metodo di *prendere in parti* (n° 119) dà con facilità il prodotto espresso in parallelepipedi rettangoli che hanno tutti per base una tesa quadrata e le altezze espresse in tese, o piedi, o pollici, o linee.

Di questi diversi solidi quello che ha per altezza 1 tesa è la tesa cuba e s'indica per t.t.t.; quello che ha per alt. 1 piede si chiama *tesa-tesa-piede* e s'indica per t.t. pi.; quello che ha per altezza 1 pollice è la *tesa-tesa-pollice* e si nota per t.t. pol., finalmente quello che ha per altezza 1 linea è la *tesa-tesa-linea* indicata per t.t. lin. Secondo questo modo di scrivere si dovrà fare il prodotto di $387^{\text{t.}} 5^{\text{pi.}} 9^{\text{pol.}} 7^{\text{lin.}} \frac{7}{16}$ per $7^{\text{t.}} 4^{\text{pi.}} 9^{\text{pol.}} 2^{\text{lin.}}$, considerato come numero astratto.

Ecco l' operazione.

	38 ^{t.t.t.}	5 ^{t.t.pi.}	9 ^{t.t.pol.}	7 ^{t.t.lin.}	$\frac{1}{2}$
	7 ^{t.}	4 ^{pi.}	9 ^{pol.}	2 ^{lin.}	
per	3 ^{t.t.pi.}	3 ^{t.t.pi.}			
.. 2	2	2			
.. 6 ^{t.t.pol.}	0	3	6 ^{t.t.pol.}		
.. 3	0	1	9		
.. 1.....					0 ^{t.t.t.} 0 ^{t.t.pi.} 7 ^{t.t.pol.}
.. 6 ^{t.t.lin.}	0	0	3	6 ^{t.t.lin.}	
.. 1	0	0	0	7	
.. $\frac{1}{2}$	0	0	0	2	$\frac{1}{2}$
.. $\frac{4}{6}$	0	0	0	0	$\frac{4}{6}$
.. $\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
.. 3 ^{pi.}	103	5	10	9	$\frac{3}{6}$
.. 1	64	3	11	7	$\frac{1}{6}$
.. 6 ^{pol.}	32	1	11	9	$\frac{3}{6}$
.. 3	16	0	11	10	$\frac{4}{6}$
.. 1.....					$\frac{1}{6}$
.. 2 ^{lin.}	0	5	4	7	$\frac{1}{2}$
	3023 ^{t.t.t.}	4 ^{t.t.pi.}	10 ^{t.t.pol.}	1 ^{t.t.lin.}	$\frac{1}{2}$

Volendo convertire questo prodotto in misure cubiche, è necessario osservare che

$$\begin{aligned}
 1^{t.t.pi.} &= 6^{pi.} \times 6^{pi.} \times 1^{pi.} = 36^{pi.cub.} \\
 1^{t.t.pi.} &= \frac{3}{2}^{pi.cub.} = 3^{pi.cub.} \\
 1^{t.t.lin.} &= \frac{3}{2}^{pi.cub.} = \frac{1}{2}^{pol.cub.} = 432^{pol.cub.}
 \end{aligned}$$

Si avrà dunque

$$\begin{aligned}
 3023^{t.t.t.} &= 3023^{t.cub.} \\
 4^{t.t.pi.} &= 144^{pi.cub.} \\
 10^{t.t.pol.} &= 30 \\
 1^{t.t.lin.} &= 432^{pol.cub.} \\
 \frac{1}{2}^{t.t.lin.} &= 216^{pol.cub.} \\
 \hline
 \text{somma.} &= 3023^{t.cub.} \quad 174^{pi.cub.} \quad 714^{pol.cub.} \quad 1680^{lin.cub.}
 \end{aligned}$$

(175)

Supponiamo per un secondo esempio che si debbano moltiplicare i tre fattori

$$13^{\text{can.}} \cdot 7^{\text{pal.}} \cdot 5^{\text{on.}} \cdot 2^{\text{min.}} \cdot \frac{1}{2}, 7^{\text{can.}} \cdot 3^{\text{pal.}} \cdot 7^{\text{oo.}} \cdot 1^{\text{min.}} \cdot \frac{1}{2}, 3^{\text{can.}} \cdot 6^{\text{pal.}} \cdot 4^{\text{on.}}$$

Il prodotto de' primi due fattori è (n° 238)

$$98^{\text{c.c.}} \cdot 4^{\text{c.pal.}} \cdot 7^{\text{c.oo.}} \cdot 4^{\text{c.min.}} \cdot \frac{497}{11000}$$

E facendo lo stesso ragionamento si vedrà che trattasi di moltiplicare $98^{\text{c.c.}} \cdot 4^{\text{c.pal.}} \cdot 7^{\text{c.c.oo.}} \cdot 4^{\text{c.c.min.}} \cdot \frac{497}{11000}$ per $3^{\text{c.}} \cdot 6^{\text{pal.}} \cdot 4^{\text{on.}}$ considerato come numero astratto. L'operazione adunque sarà eseguita nel modo che qui si vede.

	$98^{\text{c.c.c.}}$	$4^{\text{c.c.pal.}}$	$7^{\text{c.c.oo.}}$	$4^{\text{c.c.min.}}$	$\frac{497}{11000}$
	$3^{\text{c.}}$	$6^{\text{pal.}}$	$4^{\text{on.}}$		
	$294^{\text{c.c.c.}}$				
per $4^{\text{c.c.pal.}}$	1	$4^{\text{c.c.pal.}}$			
... $6^{\text{c.c.oo.}}$	0	1	$6^{\text{c.c.oo.}}$		
... 1	0	0	3		
... $1^{\text{c.c.min.}}$	0	0	0	$3^{\text{c.c.min.}}$	
... 3	0	0	1	4	
... $\frac{497}{11000} = \frac{1}{2}$	0	0	0	1	
... $\frac{497}{11000} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
... $\frac{497}{11000}$	0	0	0	0	$\frac{1}{40}$
... $\frac{497}{11000}$	0	0	0	0	$\frac{1}{80}$
... $\frac{497}{11000}$	0	0	0	0	$\frac{1}{160}$
... $4^{\text{pal.}}$	49	2	3	4	$\frac{300}{11000}$
... 2	24	5	1	4	$\frac{2400}{11000}$
... $4^{\text{on.}}$	4	0	10	1	$\frac{4000}{11000}$
					$\frac{11000}{11000}$
	$373^{\text{c.c.c.}}$	$6^{\text{c.c.pal.}}$	$3^{\text{c.c.oo.}}$	$4^{\text{c.c.min.}}$	$\frac{497}{11000}$

Volendo esprimere questo prodotto in misure cubiche, è necessario osservare che

$$1^{\text{c.c.pal.}} = 8^{\text{p.}} \times 8^{\text{p.}} \times 1^{\text{p.}} = 64^{\text{pal.cub.}}$$

$$1^{\text{c.c.oo.}} = 96^{\text{oo.}} \times 96^{\text{oo.}} \times 1^{\text{oo.}} = 9216^{\text{oo.cub.}} = 5^{\text{p.c.}} \cdot \frac{1}{2} = 5^{\text{p.c.}} \cdot 576^{\text{on.c.}}$$

$$1^{\text{c.c.min.}} = 480^{\text{m.}} \times 480^{\text{m.}} \times 1^{\text{m.}} = 230400^{\text{m.c.}} = \frac{1^{\text{c.c.oo.}}}{5} =$$

$$1^{\text{pal.c.}} \cdot 115^{\text{on.c.}} \cdot 25^{\text{min.c.}}$$

Si avrà perciò

$$\begin{array}{rcll}
 373^{c.c.} & = & 373^{c.cub.} & \\
 6^{c.c.pol.} & = & 384^{pal.cub.} & \\
 3^{c.c.aa.} & = & 16 & \\
 4^{c.c.m.} & = & 4 & 460^{oa.cub.} \quad 100^{m.cub.} \\
 \frac{11111}{11111} 7^{c.c.m.} & = & 0 & 820 \quad 116 \\
 \hline
 \text{Somma...} & = & 373^{c.cub.} & 404^{pal.cub.} \quad 1281^{oa.cub.} \quad 91^{m.cub.}
 \end{array}$$

241. La prolissità di questi calcoli, l'attenzione che si richiede per condurli a termine senza errori, la impossibilità di verificare l'esattezza del risultamento con una operazione più semplice che serva di *prova* (n° 125), e finalmente il confronto con quelli semplicissimi esposti sul sistema metrico (n° 235 e 236), fanno conoscere all'evidenza, che se grande è il vantaggio della divisione decimale nelle misure in generale, vieppiù importante si rende l'applicarla all'unità lineare, che serve di elemento per le misure quadrate e cubiche.

FINE DELL'ARITMETICA.

INDICE DELLE MATERIE.

ni.		pag.
	<u>NOZIONI PRELIMINARI.</u>	<u>1</u>
1	<u>Definizione della grandezza. Di che si occupa la Matematica.</u>	
2	<u>Che s'intende per unità. Di quante specie è la grandezza.</u>	
3	<u>Che cosa è il numero. Di che si occupa l'Aritmetica.</u>	
4	<u>Di quante specie sono i numeri.</u>	
	<u>CAPO I. DE' NUMERI INTERI.</u>	<u>3</u>
5	<u>Considerazioni sulla composizione de' numeri.</u>	
	<u>ART. I. Della numerazione.</u>	<u>ivi</u>
6	<u>Numerazione parlata.</u>	
7	<u>scritta.</u>	
8	<u>Relazione tra la numerazione parlata e la scritta, necessaria per facilitare la lettura de' numeri.</u>	
	<u>NOTA. Sul sistema di nomenclatura.</u>	
	<u>ART. II. Operazioni su i numeri interi.</u>	<u>7</u>
9	<u>Considerazioni generali.</u>	
	<u>§. I. Dell'addizione.</u>	<u>8</u>
10	<u>Definizioni.</u>	
11	<u>Addizione de' numeri semplici.</u>	
12	<u>composti di più cifre.</u>	
	<u>§. II. Della sottrazione.</u>	<u>10</u>
13	<u>Definizioni. Sottrazione de' numeri semplici.</u>	
14 e 15	<u>Sottrazione de' numeri composti di più cifre.</u>	
16	<u>Altra maniera di eseguir la sottrazione.</u>	
17 e 18	<u>Del complemento aritmetico, e suo uso.</u>	
19 e 20	<u>Del complemento a qualunque numero.</u>	

n ^o .	pag.
<u>§. III. Della moltiplicazione.</u>	<u>15</u>
21 <u>Definizioni.</u>	
22 <u>Moltiplicazione de' numeri di una sola cifra.</u>	
23 <u>Il prodotto di due numeri è sempre lo stesso, qualunque de' numeri si prenda per moltiplicando.</u>	
24 <u>Caso in cui il moltiplicatore è di una cifra.</u>	
25 <u>Regola, quando il moltiplicando è seguito da zeri.</u>	
26 <u>Teoremi diversi.</u>	
27 <u>Caso in cui il moltiplicatore è di più cifre.</u>	
28 <u>Osservazioni per la pratica dell'operazione.</u>	
29 <u>Regola per conoscere quante cifre deve avere il prodotto.</u>	
<u>§. IV. Della divisione.</u>	<u>23</u>
30 e 31 <u>Definizioni.</u>	
32 <u>Divisione di un numero di una o di due cifre per un numero di una cifra.</u>	
33 <u>Caso in cui il dividendo è di più cifre e il divisore di una cifra sola.</u>	
34 <u>Modo abbreviato per eseguir l'indicata divisione.</u>	
35 <u>Caso in cui il divisore è anche di più cifre.</u>	
<u>NOTA. Regola da tenersi, quando nel quoziente si scrive una cifra o troppo grande o troppo piccola, per non perdere il calcolo fatto.</u>	
36 <u>Conseguenze de' premessi principii.</u>	
37 <u>Regola per trovare con precisione quante volte il divisore è contenuto nel dividendo parziale.</u>	
38 <u>Regola da seguirsi, quando il dividendo e il divisore son terminati da zeri.</u>	
39 <u>Divisione abbreviata.</u>	
<u>CAPO II DE' DECIMALI.</u>	<u>32</u>
<u>ART. I. Natura e proprietà de' decimali.</u>	<u>ivi</u>
40 <u>Estensione del sistema di numerazione per rappresentare parte minori dell'unità.</u>	
41 <u>Come si leggono e si scrivono i decimali.</u>	
42 <u>Gli zeri aggiunti o a destra o a sinistra di un numero che contiene parti intere e decimali non ne alterano il valore.</u>	
<u>ART. II. Operazioni su i decimali.</u>	<u>34</u>
43 <u>Considerazioni generali.</u>	
44 <u>Addizione.</u>	
45 <u>Sottrazione.</u>	
46 <u>Teoremi diversi intorno alla moltiplicazione e alla divisione.</u>	
47 <u>Moltiplicazione.</u>	
48 <u>Divisione quando il divisore è intero.</u>	
49 <u> quando ha decimali.</u>	

- n.^o. pag.
 50..53 Come si prolunga la divisione , per ottenere un quoziente o esatto o approssimato.

CAPO III. DELLE FRAZIONI 39

54 Definizioni. Spiegazione de' segni.

ART. I. *Natura e proprietà delle frazioni.* . . 40

- 55 Considerazioni sul modo di rappresentare le parti minori dell' unità. Definizioni.
 56 Che s' intende per quantità commensurabile.
 57 Le frazioni hanno origine dalla divisione.
 58..62 Conseguenze che ne risultano.
 63 Come si rende più semplice una frazione.

ART. II. *Sulla divisibilità de' numeri.* . . . 44

- 64 Alcune definizioni.
 65..67 Teoremi diversi.
 68 Quali sono i numeri divisibili per 2 , e per 5.
 69 per 9 , e per 3.
 70 Come si trova il resto della divisione di un numero qualunque per un altro.
 71 Carattere per riconoscere se un numero è divisibile per 4 , per 8 , ec.
 72 Proprietà del numero 11 riguardato come divisore.
 73 Come si trova il massimo comun divisore.
 74 Osservazioni per render più breve questa ricerca.
 75 Una frazione si riduce alla sua più semplice espressione dividendone i termini pel m. c. divisore.
 76 Metodo per pervenirvi facilmente.
 77 e 78 Come si trovano tutti i divisori primi di un numero.
 79 Applicazione di questa teorica alla ricerca del m. c. divisore.

ART. III. *Operazioni sulle frazioni.* 53

§. I. *Addizione e sottrazione.* ivi

- 80 Addizione e sottrazione delle frazioni aveuti lo stesso denominatore.
 81 Riduzione delle frazioni allo stesso denominatore.
 82 Come si trova il denominatore comune , quando i denominatori non sono numeri primi tra loro.
 83 Come si conosce , qual è la più grande di due frazioni date.
 84 Addizione degl' interi uniti a frazioni.
 85 Sottrazione dello stesso genere.

§. II. *Moltiplicazione e divisione.* 56

- 86 Moltiplicazione di una frazione per un intero.
 87 Divisione dello stesso genere.

ni.		pag.
88 e 89	Moltiplicazione nel caso in cui il moltiplicatore è una frazione.	
90 e 91	Divisione nel caso in cui il divisore è una frazione.	
92	Come si cambia la moltiplicazione in divisione, e viceversa.	
93	Moltiplicazione degl'interi uniti a frazioni.	
94..96	La stessa operazione eseguita col metodo di prendere in parti.	
97	Divisione quando il solo dividendo è accompagnato da una frazione.	
98	quando lo è anche il divisore.	
	ART. IV. Paragone fra i diversi sistemi di frazioni.	62
99	Le proprietà delle frazioni ordinarie si trovano avverate nelle decimali.	
100	Frazioni decimali periodiche.	
101	Quando avviene che una frazione ordinaria si può convertire esattamente in decimali.	
102	Come una frazione si converte in un'altra di una specie data.	
103	Data una frazione decimale, trovare la frazione ordinaria corrispondente.	
104	Considerazioni sulla natura delle frazioni decimali periodiche.	
	CAPO IV. DE' NUMERI COMPLESSI.	66
105	Definizione de' numeri complessi.	
106	Esposizione di alcune misure da servire per gli esempi.	
107	Considerazioni sul calcolo de' numeri complessi.	
	ART. I. Conversione de' numeri complessi.	67
108	Conversione dell'unità principale in unità dell'infima specie.	
109	Conversione di un numero complesso in frazione ordinaria.	
110 e 111	in unità dell'infima specie; e viceversa.	
112	Conversione in numero complesso di un numero frazionario dell'infima specie.	
113	di un numero frazionario dell'unità principale.	
	ART. II. Operazioni su i numeri complessi.	72
	§. I. Addizione e sottrazione.	ivi
114	Regola per l'addizione.	
115	per la sottrazione.	

n°.	pag.
<u>§. II. Moltiplicazione e divisione.</u>	<u>73</u>
<u>116 Divisione di un numero complesso per un numero intero ed astratto.</u>	
<u>117 Moltiplicazione di un numero complesso per un numero intero ed astratto.</u>	
<u>118 Moltiplicazione di un numero complesso per un altro anche complesso.</u>	
<u>119 Lo stesso caso col metodo del <i>prender in parti</i>.</u>	
<u>120 Qualunque de' fattori si prenda per moltiplicando, il prodotto, quando si esprime sotto forma di numero astratto, è sempre lo stesso.</u>	
<u>121 Maggiori particolarità sul metodo del n° 119.</u>	
<u>122 Considerazioni sul caso in cui i numeri complessi da moltiplicarsi fossero della medesima specie.</u>	
<u>123 Divisione di un numero complesso per un altro nel caso in cui il divisore e il dividendo sono di specie diversa.</u>	
<u>124 Divisione, quando il divisore e il dividendo sono della stessa specie.</u>	

CAPO V. DELLA RIPROVA DELLE QUATTRO OPERAZIONI. 83

<u>125 Riprova dell'addizione.</u>	
<u>126 della sottrazione.</u>	
<u>127 Diversi mezzi per verificare la moltiplicazione e la divisione.</u>	
<u>128 Prova fondata sui resti. Prova del 9 per la moltiplicazione.</u>	
<u>129 Prova dell' 11. Considerazioni generali su questa riprova.</u>	
<u>130 Applicazione della prova del 9 alla divisione.</u>	

CAPO VI. DE' DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.. 87

<u>131 Come si scrive nn numero in una base diversa da 10. Un numero scritto in un'altra base tradurlo nel sistema decimale; e viceversa.</u>	
<u>132 Come un numero si moltiplica o si divide per la base.</u>	
<u>133 Esempi delle quattro operazioni sopra i numeri scritti in una base diversa da 10.</u>	
<u>134 Considerazioni sull'attual sistema di numerazione. Condizioni alle quali dovrebbe soddisfare la base. Riflessioni sulla base 10.</u>	

NOTA I^a Su i sistemi di numerazione de' Romani e dei Greci.

- » II^a Opinione sul motivo che ha determinato la scelta della base 10.
- » III^a Inconvenienti che risultano dalla diversità fra le misure e il sistema di numerazione.

★★

CAPO VII. OSSERVAZIONI SULLA MOLTIPLICAZIONE,
SULLA DIVISIONE, E SULLE FRAZIONI. CALCOLO PER
APPROSSIMAZIONE.

94

- 135 Regola da tenersi nel trascurar una parte delle cifre decimali.
- 136 Quando si debbono moltiplicar due numeri che contengono molte cifre decimali, e nel prodotto se ne domandano poche, l'operazione può esser regolata in modo da ottenere il prodotto con tante cifre esatte quante ne occorrono.
- 137 Quando i fattori non sono esatti ma approssimati, si dà la regola per conoscer quante sono le cifre esatte del prodotto.
- 138 Quando nella moltiplicazione uno de' fattori contiene una frazione decimale periodica, bisogna a questa sostituir la frazione ordinaria corrispondente.
- 139 Quali avvertenze sono necessarie per operar colla frazione decimale periodica.
- 140 Si espongono alcuni casi ne' quali l'uso delle frazioni ordinarie è preferibile alle decimali. Casi ne' quali si può cambiar la moltiplicazione in divisione.
- 141 Compendio da usarsi nella divisione, quando è determinato il numero delle cifre che si cercauo nel quoziente.
- 142 Regola da seguirsi, quando il divisore o il dividendo è accompagnato da una frazione decimale periodica.
- 143 Quando si può cambiar la divisione in moltiplicazione.
- 144 e 145 Moltiplicando il dividendo e il divisore per qualche numero, si rende in taluni casi la divisione più semplice.
- 146 Quali sono i numeri che in un prodotto compongono le colonne verticali. Metodo per ottener facilmente le diverse cifre di un prodotto (qualunque sia il numero delle cifre de' fattori) senza scrivere i prodotti parziali.
- 147 Divisione ordinata, ossia metodo per eseguir brevemente la divisione, allorchè il divisore ha moltissime cifre, impiegando un divisore di due o tre cifre.
- 148 Osservazioni per la pratica di quest'operazione.
- 149 Esempi.
- 150 Utilità di questo metodo quando il dividendo o il divisore non sono esatti ma approssimati.
- 151 Metodo per convertire una frazione ordinaria in frazione continua.
- 152 Come si risale da una frazione continua alla frazione ordinaria equivalente.
- 153 Come si trovano le ridotte.

- 154 Applicazione del metodo ad una frazione decimale non esatta, ad oggetto di trovare delle frazioni approssimate espresse in termini più semplici.

NOTA. Sulle frazioni convergenti verso il rapporto della circonferenza al diametro.

CAPO VIII. DELLA RAGIONE E DELLA PROPORZIONE... 113

- 155 Definizione del rapporto.

- 156 della proporzione.

- 157 Come l'idea di proporzione è contenuta nella moltiplicazione e nella divisione.

- 158 Che cosa sono i numeri razionali.

- 159 Definizione della differenza e dell'equidifferenza.

NOTA. Sul rapporto aritmetico e geometrico.

ART. I. *Proprietà delle proporzioni.* . . . 115

- 160 Un rapporto non varia moltiplicando o dividendo i suoi termini per un medesimo numero.

- 161 In ogni proporzione il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' medi.

- 162 Cambiamenti di posto che possono farsi ne' termini di una proporzione.

- 163 In una proporzione moltiplicando o dividendo per un medesimo numero i due antecedenti o i due conseguenti, i numeri che ne risultano saranno proporzionali.

- 164 Se due proporzioni hanno gli stessi antecedenti, i conseguenti saranno proporzionali; e se hanno comuni i conseguenti, avranno proporzionali gli antecedenti.

- 165 In una proporzione la somma de' due primi termini sta alla somma de' due ultimi, come il primo al terzo, o come il secondo al quarto; e la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

- 166 La stessa proprietà per la differenza de' termini.

- 167 La somma de' due primi termini o de' due antecedenti sta alla loro differenza, come la somma degli altri due termini, o de' due conseguenti sta alla loro differenza.

- 168 In una serie di rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

- 169 Se si moltiplicano, termine per termine, diverse proporzioni, i prodotti saranno in proporzione.

- 170 Dati tre termini di una proporzione, trovare il quarto.

ART. II. Problemi dipendenti dalle proporzioni.

120

§. I. Della Regola del Tre ivi

- 171 Quistioni proposte per dar idea della regola.
 172 Riflessioni sulla proporzionalità.
 173 Regola per intavolar la proporzione.
 174 Che s'intende per ragion diretta e ragione inversa.
 175 Altri problemi per esercizio.

§. II. Regola del tre composta. 125

- 176 Si espone un problema per dar idea della regola.
 177 Altro problema più complicato.

§. III. Della regola congiunta. 129

- 178 Si espone un problema per dar idea della regola.
 179 Si applica la regola al cambio delle monete.

§. IV. Problemi d'interesse, e regola di sconto . . 131

- 180 Si dà la regola per trovare l'interesse di una data somma.
 181 Come si trova il capitale corrispondente ad una data rendita.
 182 Si determina quanto vale una data somma dopo un anno, e quanto vale attualmente una somma di cui non si può disporre che dopo un anno.
 183 Lo stesso esame nel caso che il tempo fosse minore di un anno.
 184 Del pari, quando il tempo passa l'anno.
 185 Regola di sconto, diretta ed inversa.

§. V. Regola di Società. 135

- 186 Problema destinato a far conoscer l'oggetto della Regola.
 187 Osservazioni sulle messe de' Socii.
 188 Caso in cui i capitali non son tenuti in commercio per lo stesso tempo.
 189 L'oggetto della Regola è di dividere un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati. Problema relativo.

§. VI. Della regola di alligazione. 138

- 190 Oggetto della regola, e problema corrispondente.
 191 Sua applicazione alle leghe metalliche.
 192 alla misura delle distanze.

CAPO IX. DELLE MISURE. 140

- 193 Che s'intende per misura, e quante specie di misure vi sono.
 194 Dipendenza delle misure di superficie e di volume dall'unità lineare.
 195 Condizioni affinchè le misure formassero un sistema.

ni.		pag.
196	Quali sono le misure che possono chiamarsi convenzionali.	
	<u>ART. I. Esposizione delle principali misure in uso.</u>	<u>144</u>
	<u>§. I. Misure convenzionali.</u>	<u>ivi</u>
197	Come si misura il tempo.	
	NOTA. Sul moto apparente del Sole , e su i principali elementi per la misura del tempo.	
198	Qual è l'unità di tempo.	
199	Della divisione della circonferenza del circolo.	
200	La parola grado si applica ancora alla divisione degli strumenti fisici.	
	<u>NOTA. Sul termometro.</u>	
	<u>§. II. Nuovo sistema metrico di Francia.</u>	<u>151</u>
201	Esposizione del sistema.	
202	Cambiamento dell'unità secondo l'uso cui è destinata la misura.	
203	In un numero scritto si cambia l'unità cambiando di posto la virgola.	
204	Divisione decimale portata nel quadrante del circolo e nel tempo.	
205	Determinazione più esatta della lunghezza del metro.	
206	<u>Uso attuale del sistema metrico.</u>	
	<u>§. III. Antiche misure di Parigi.</u>	<u>154</u>
207	Misure di lunghezza.	
208	Rapporto fra il piede e il metro.	
209	Misure di superficie.	
210	di volume.	
211	di capacità pe' liquidi.	
212	per gli aridi.	
213	Pesi.	
214	Rapporti fra il piede e il metro , fra il chilogrammo e la libbra.	
	<u>§. IV. Sistema di misure attualmente in uso nella Francia.</u>	<u>156</u>
215	Esposizione delle misure attuali.	
	<u>§. V. Misure della Città di Napoli.</u>	<u>157</u>
216	Misure di lunghezza.	
217	di superficie.	
218	di capacità.	
219	di volume pe' solidi.	
220	Pesi.	

ni.		pag.
	<i>§. IV. Maniera di determinare i rapporti delle misure fra loro e con quelle del sistema metrico, esposta sulle misure di Napoli.</i>	158
221	Rapporti delle misure col palmo cubo, e fra loro.	
222	Utilità della <i>divisione ordinata</i> in questa ricerca.	
323	Rapporti approssimati ed espressi in numeri semplici delle misure di Napoli.	
224 e 225	Determinazione de' rapporti delle misure di Napoli con quelle del sistema metrico.	
	NOTA. Sulla condizione delle misure di Napoli.	
	<i>§. VII. Sistema di misure di Sicilia.</i>	163
226	Misure di lunghezza.	
227	di superficie.	
228	di capacità.	
229	Pesi.	
	<i>§. VIII. De' rapporti di alcune altre principali misure.</i>	ivi
230	Utilità della conoscenza de' rapporti che le misure de' diversi paesi hanno con quelle del sistema metrico.	
231	Misure di lunghezza per l'uso comune delle Città principali, riferite al metro.	
232	Misure itinerarie riferite al chilometro.	
233	Pesi riferiti al chilogrammo.	
234	Come da questi rapporti si ricavano quelli che le misure hanno fra loro.	
	<i>ART. II. Moltiplicazione de' numeri complessi della medesima specie.</i>	166
235	Caso in cui si debbano moltiplicare due fattori lineari espressi in decimali. Come si legge il prodotto in misure quadre e come si cambia l'unità principale.	
236	Le stesse considerazioni pel caso di tre fattori lineari espressi in decimali.	
237 e 238	Come si fa la moltiplicazione di due misure lineari espresse in numeri complessi.	
239 e 240	Moltiplicazione di tre fattori lineari espressi in numeri complessi.	
241	Utilità della divisione decimale nelle misure.	

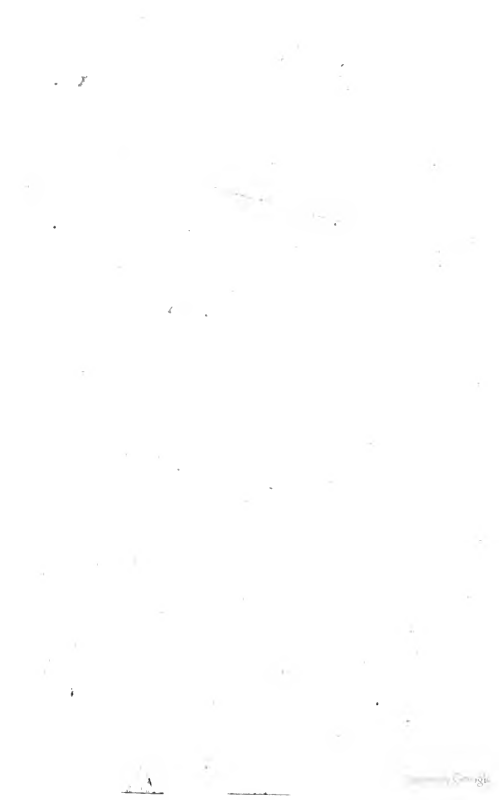
SBN 606351



ERRORI

CORREZIONI

<i>pag.</i>	<i>v.</i>		
3	7 <i>da sotto</i>	oggetto	oggetto
13	1	valerà	varrà
24	8	del	dal
31	5 <i>da sotto</i>	le cifra	la cifra
32	14	cha	che
35	10 <i>da sotto</i>	dividano	dividono
"	7 <i>da sotto</i>	n° 36	n° 38
38	6	Sin	Sia
54	16	tanti piccole	tanto piccole
62	25	rapportati	rapportate
64	<i>ultimo</i>	132, X 0 001	132 X 0,001
72	<i>le frazioni dell' ultimo esempio</i>	<i>debbono essere</i>	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$
89	15	generale	generalì
114	11 <i>da sotto</i>	possono	possano
124	1	rispettivamente	rispettivamente
139	9	dell'	dall'
147	11	che giorni	due giorni
152	1	Questa	Questo



2 vol 8 4 3.00

